2011 A II Lösung

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$ mit $x \in \mathbb{R}$.
5	1.1	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $\lvert x \rvert \to \infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\overbrace{e^{2x}}^{\to 0}}{1+\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}} = 3 \qquad \text{Waagrechte Asymptote: } y_1 = 3$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{3+e^{2x}}^{\to\infty}}{\underbrace{1+e^{2x}}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1 \qquad \text{Waagrechte Asymptote: } y_2 = 1$$

3	1.2	Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen und ihr Graph keine Extrempunkte besitzt.

$$\left[\text{Teilergebnis}: f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}\right]$$

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}} = 0 \;\Rightarrow\; 3+e^{2x} = 0 \;\Rightarrow\; e^{2x} = -3 \quad \text{nicht möglich!}$$

Somit hat die Funktion f keine Nullstellen.

$$f'(x) = \frac{\left(1+e^{2x}\right)\cdot 2e^{2x} - \left(3+e^{2x}\right)\cdot 2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2} = \frac{2e^{2x}+2e^{4x}-6e^{2x}-2e^{4x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2} = \frac{-4e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2} < 0$$

für alle $x \in \mathbb{D}$.

Somit hat der Graph der Funktion f keine Extrema.

Der Graph der Funktion f ist streng monoton fallend für $x \in \mathbb{D}$

9 1.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f, ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes W und stellen Sie die Gleichung der Tangente w an den Graphen von f im Wendepunkt W auf.

$\left[\text{Teilergebnis}: W(0;2)\right]$

$$f''(x)=\frac{\left(1+e^{2x}\right)^2\cdot\left(-8e^{2x}\right)-\left(-4e^{2x}\right)\cdot 2\left(1+e^{2x}\right)\cdot 2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^4}$$

$$f''(x)=\frac{\left(1+e^{2x}\right)\cdot\left[\left(1+e^{2x}\right)\cdot\left(-8e^{2x}\right)-\left(-4e^{2x}\right)\cdot 2\cdot 2e^{2x}\right]}{\left(1+e^{2x}\right)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-8e^{2x}-8e^{4x}+16e^{4x}}{\left(1+e^{2x}\right)^3}$$

$$f''(x)=\frac{8e^{4x}-8e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^3}$$

$$f''(x)=\frac{8e^{2x}\cdot\left(e^{2x}-1\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^3}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{2x}-1=0 \quad\Rightarrow\quad e^{2x}=1 \quad\Rightarrow\quad x_W=0$$

		0	x
$8e^{2x}$	+		+
$e^{2x}-1$	−	0	+
$\left(1+e^{2x}\right)^3$	+		+
$f''(x)$	−	0	+
G_f	rk		lk

G_f ist rechtsgekrümmt für $x\in\left]-\infty;0\right]$

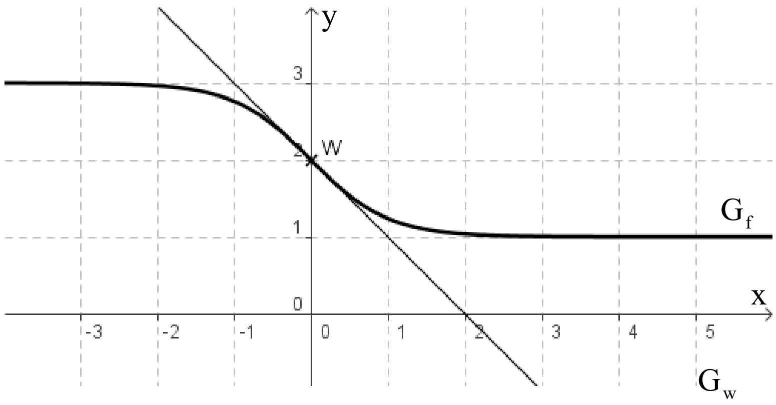
G_f ist linksgekrümmt für $x\in\left[0;\infty\right[$

$$f(0)=\frac{3+e^{2\cdot 0}}{1+e^{2\cdot 0}}=2 \quad\Rightarrow\quad WP\left(0|2\right)$$

$$f'(0)=\frac{-4e^{2\cdot 0}}{\left(1+e^{2\cdot 0}\right)^2}=\frac{-4}{\left(1+1\right)^2}=-1$$

Dann folgt für die Wendetangente: $w: x=-x+2$

4 1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f mit der Tangente w für $-3 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$.



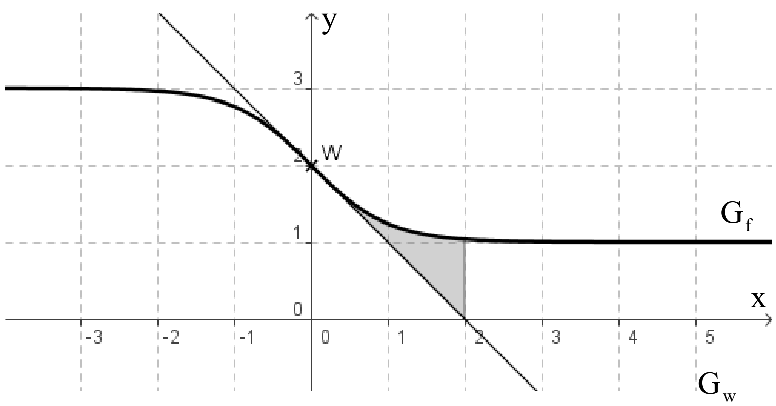
3 1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto 3x - \ln\left(1+e^{2x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.

$$F'(x) = 3 - \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{3\cdot\left(1+e^{2x}\right)}{1+e^{2x}} - \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{3+3e^{2x}-2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}} = f(x)$$

Somit ist F eine Stammfunktion von f.

1.6.0 Der Graph von f, die Tangente w und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}$ und $u \ge 2$ schließen ein Flächenstück A_u ein.

4 1.6.1 Kennzeichnen Sie für $u = 2$ das Flächenstück A_2 im Schaubild der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl A.
$[\text{Teilergebnis}: A \approx 0{,}675]$



$$A = \int_0^2 \left(f(x) - w(x)\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}} - (-x+2)\right)dx = \left[3x - \ln\left(1+e^{2x}\right) + \tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_0^2 =$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 + x - \ln\left(1+e^{2x}\right)\right]_0^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 4 + 2 - \ln\left(1+e^4\right) + \ln\left(1+e^{2\cdot 0}\right) = 4 - \ln\left(1+e^4\right) + \ln(2)$$

$A \approx 0{,}675$

6 | 1.6.2 Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren u näherungsweise so, dass das Flächenstück A_u gleich große Flächenanteile oberhalb und unterhalb der x-Achse besitzt.
Benutzen Sie $u_0 = 4$ als Startwert und führen Sie einen Näherungsschritt aus.

Damit die beiden Flächenanteile gleich groß sind, muss gelten:

$$A_{\text{oberhalb der x-Achse}} = A_{\text{unterhalb der x-Achse}}$$

$$0{,}675 + \int_2^u f(x)\,dx = \int_2^u \left(0 - w(x)\right)dx$$

$$0{,}675 + \int_2^u \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx = \int_2^u (x-2)\,dx$$

$$0{,}675 + \left[3x - \ln\left(1+e^{2x}\right)\right]_2^u = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^u$$

$$0{,}675 + 3u - \ln\left(1+e^{2u}\right) - \left(6 - \ln\left(1+e^4\right)\right) = \tfrac{1}{2}u^2 - 2u - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 4 - 2\cdot 2\right)$$

$$0{,}675 + 3u - \ln\left(1+e^{2u}\right) - 6 + \ln\left(1+e^4\right) = \tfrac{1}{2}u^2 - 2u + 2$$

$$\underbrace{-\tfrac{1}{2}u^2 + 5u - \ln\left(1+e^{2u}\right) + \ln\left(1+e^4\right) - 7{,}325}_{=J(u)} = 0$$

Also hat man zu lösen: $J(u) = -\tfrac{1}{2}u^2 + 5u - \ln\left(1+e^{2u}\right) + \ln\left(1+e^4\right) - 7{,}325 = 0$

Nun benötigt man noch $\dfrac{dJ(u)}{du} = -u + 5 - \dfrac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}$

Mit dem Startwert $u_0 = 4$ folgt dann:

$$u_1 = u_0 - \frac{J(u_0)}{\frac{dJ(u_0)}{du}} = 4 - \frac{J(4)}{\frac{dJ(4)}{du}} = 4 - \frac{-\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 5\cdot 4 - \ln\left(1+e^{2\cdot 4}\right) + \ln\left(1+e^4\right) - 7{,}325}{-4 + 5 - \frac{2e^{2\cdot 4}}{1+e^{2\cdot 4}}} \approx 4{,}69$$

2.0 Gegeben ist ferner in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$ eine Funktion $g: x \mapsto a\cdot\ln(bx+c)+2$, bei der die reellen, von Null verschiedenen Koeffizienten a, b und c dadurch festgelegt sind, dass der Graph dieser Funktion durch den Punkt $P(0;2)$ verläuft, dort die Steigung 1 und an der Stelle $x_0 = -1$ die Steigung 3 besitzt.

6 | 2.1 Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.
$\left[\text{Teilergebnis}: a = \tfrac{3}{2};\ b = \tfrac{2}{3};\ c = 1\right]$

$$g(x) = a\cdot\ln(bx+c)+2 \quad\Rightarrow\quad g'(x) = a\cdot\frac{b}{bx+c} = \frac{a\cdot b}{bx+c}$$

Nun gilt:

$$g(0) = a\cdot\ln(b\cdot 0+c)+2 = a\cdot\ln(c)+2 = 2 \quad\Rightarrow\quad a\cdot\ln(c) = 0 \quad\Rightarrow\quad \ln(c) = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{c=1}}$$

$$g'(0) = \frac{a\cdot b}{b\cdot 0+1} = ab = 1 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{b} \quad (\text{da } b \neq 0)$$

$$g'(-1) = \frac{ab}{-b+1} = \frac{\frac{1}{b}\cdot b}{-b+1} = \frac{1}{1-b} = 3 \quad\Rightarrow\quad 1-b = \tfrac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{b=\tfrac{2}{3}}} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{a=\tfrac{3}{2}}}$$

Somit erhält man: $g(x)=\frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{3}x+1\right)+2$

2 | 2.2 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$.

Es muss gelten: $\frac{2}{3}x+1>0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}x>-1 \;\Rightarrow\; x>-\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \mathbb{D}_g=\left]-\frac{3}{2};\infty\right[$

3 | 2.3 Zeigen Sie, dass die Funktion g streng monoton ist.

$$g'(x)=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}x+1}=\frac{1}{\frac{2}{3}x+1}>0 \text{ für alle } x\in\left]-\frac{3}{2};\infty\right[$$

Somit ist g für alle $x\in\mathbb{D}_g$ streng monoton steigend.

8 | 2.4 Untersuchen Sie, ob die Funktion h mit

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{für } x<0 \quad (\text{siehe Aufgabe 1.0}) \\ g(x) & \text{für } x\geq 0 \quad (\text{siehe Aufgabe 2.0}) \end{cases}$$

an der Nahtstelle $x=0$ stetig ist, begründen Sie, dass die Funktionswerte von h an der Nahtstelle ein Minimum aufweisen, und geben Sie den Winkel an, unter dem die Graphen der beiden Teilfunktionen an der Nahtstelle aufeinandertreffen.

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}} & \text{für } x<0 \\ \frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{3}x+1\right)+2 & \text{für } x\geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}h(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}=\lim_{h\to0}\frac{3+e^{2\cdot(0-h)}}{1+e^{2\cdot(0-h)}}=\lim_{h\to0}\frac{3+e^{-2h}}{1+e^{-2h}}=\frac{4}{2}=2$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}h(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{3}x+1\right)+2\right)=\lim_{h\to0}\left(\frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\cdot(0+h)+1\right)+2\right)=\frac{3}{2}\cdot\ln(1)+2=2$$

$$h(0)=\frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\cdot0+1\right)+2=2$$

Somit ist die Funktion h an der Nahtstelle $x_0=0$ stetig.

Nach Aufgabe 1.2 ist der Graph der Funktion f und somit auch G_h streng monoton fallend für alle $x\leq 0$.

Nach Aufgabe 2.3 ist der Graph der Funktion g und somit auch G_h streng monoton steigend für alle $x\geq 0$.

Dann muss aber der Graph der Funktion an der Stelle $x_0=0$ ein absolutes Minimum haben.

$$h'(x)=\begin{cases} \dfrac{-4e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2} & \text{für } x<0 \\ \dfrac{1}{\frac{2}{3}x+1} & \text{für } x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}h'(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-4e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}=\lim_{h\to0}\frac{-4e^{2\cdot(0-h)}}{\left(1+e^{2(0-h)}\right)^2}=\lim_{h\to0}\frac{-4e^{-2h}}{\left(1+e^{-2h}\right)^2}=\frac{-4}{2^2}=-1$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} h'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\frac{2}{3}x+1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{2}{3}\cdot(0+h)+1} = 1$$

Aufgrund der beiden Werte für die Steigungen an der Stelle $x_0 = 0$ folgt, dass die Graphen der beiden Teilfunktionen unter einem Winkel von $\rho = 90°$ aufeinandertreffen.

3.0 Mit Hilfe einer Konvexlinse (Sammellinse) wird von einem selbstleuchtenden, links von der Linse stehenden Gegenstand auf einem Schirm rechts von der Linse ein reales, scharfes Bild erzeugt. Der Abstand des Gegenstands von der Linsenmitte heißt dabei Gegenstandsweite g, der Abstand des Schirms von der Linsenweite heißt Bildweite b.
Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist durch die Linsenformel $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ gegeben, wobei mit f die Brennweite der Linse bezeichnet wird. Um ein reales Bild zu erzeugen, muss die Gegenstandsweite größer als die Brennweite sein.
Dieser Versuchsaufbau soll in einem Schaukasten einer Schule gezeigt werden. Die Brennweite der verwendeten Linse beträgt $f = 50\,\text{mm}$. Die Einheit kann für die Berechnungen weggelassen werden.

5 3.1 Zeigen Sie, dass für den gesamten Platzbedarf $a = g + b$ in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g folgender funktionaler Zusammenhang besteht:

$$a(g) = \frac{g^2}{g-50}$$

Es gilt: $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{50} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{b}=\frac{1}{50}-\frac{1}{g} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{b}=\frac{g-50}{50g} \quad\Rightarrow\quad b=\frac{50g}{g-50}$

Somit folgt für a:

$$a(g) = g + b = g + \frac{50g}{g-50} = \frac{g\cdot(g-50)}{g-50} + \frac{50g}{g-50} = \frac{g^2-50g+50g}{g-50} = \frac{g^2}{g-50}$$

4 3.2 Bestimmen Sie eine geeignete Definitionsmenge $\mathbb{D}_a$, wen der Platzbedarf a durch die Länge des Schaukastens mit $3000\,\text{mm}$ begrenzt ist.

$$\begin{aligned} a(g) &= 3000 \\ \frac{g^2}{g-50} &= 3000 \\ g^2 &= 3000\cdot(g-50) \\ g^2 &= 3000g - 150000 \end{aligned}$$

$$g^2 - 3000g + 150000 = 0$$

$$g_{1/2} = \frac{3000 \pm \sqrt{3000^2 - 4\cdot 150000}}{2} = \frac{3000 \pm \sqrt{8400000}}{2} \approx \begin{cases} 2949 \\ 51 \end{cases}$$

Somit folgt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_a =]51;2949[$

8 3.3 Beweisen Sie, dass es eine Gegenstandweite g_0 gibt, für die der Platzbedarf a minimal wird, berechnen Sie g_0 sowie den minimalen Platzbedarf $a(g_0)$ und ermitteln Sie, welcher besondere Zusammenhang zwischen g_0 und der zugehörigen Bildweite b_0 besteht.

$$a(g) = \frac{g^2}{g-50}$$

$$\frac{da(g)}{dg} = \frac{(g-50)\cdot 2g - g^2\cdot 1}{(g-50)^2} = \frac{2g^2-100g-g^2}{(g-50)^2} = \frac{g^2-100g}{(g-50)^2} = \frac{g(g-100)}{(g-50)^2} = 0$$

$g_1 = 100$ und $(g_2 = 0 \notin \mathbb{D}_a)$

g		0		100	
g	$-$	0	$+$		$+$
$g-100$	$-$		$-$	0	$+$
$(g-50)^2$	$+$		$+$		$+$
$\frac{da(g)}{dg}$	$+$		$-$	TP	$+$

Somit hat die Funktion a für $g_1 = 100$ den einzigen rel. Tiefpunkt (der zugleich absolutes Minimum ist).

$$a(100) = \frac{100^2}{100-50} = 200 = a_1$$

Nach 3.1 folgt dann:

$$b_1 = \frac{50\cdot 100}{100-50} = 100 = a_1$$

Somit sind Gegenstandsweite g_1 und Bildweite b_1 gleich groß; die Linse befindet sich in diesem Fall genau zwischen Gegenstand und Bildschirm.

$\overline{70}$