2010 A I Angabe

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto 4 \cdot \frac{1+\ln(1-x)}{1-x}$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.
3	1.1	Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}_f =]-\infty;1[$ gilt, und berechnen Sie den exakten Wert der Nullstelle der Funktion f.

Im Zähler muss gelten: $1-x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1$

Im Nenner muss gelten: $1-x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1$

Somit folgt: $\mathbb{D}_f =]-\infty;1[$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{1+\ln(1-x)}{1-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1+\ln(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1-x) = -1$$

$$\Rightarrow \quad 1-x = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = 1-\tfrac{1}{e}$$

4	1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 4 \cdot \frac{\overbrace{1+\ln\overbrace{(1-x)}^{\to\infty}}^{\to\infty}}{\underbrace{1-x}_{\to\infty}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} 4 \cdot \frac{\frac{-1}{1-x}}{-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{1-x} = 0^+$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} 4 \cdot \frac{\overbrace{1+\ln\overbrace{(1-x)}^{\to 0}}^{\to-\infty}}{\underbrace{1-x}_{\to 0^+}} \to -\infty$$

7	1.3	Bestimmen Sie über die maximalen Monotonieintervalle Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von f.

$$\left[\text{Teilergebnis}: f'(x) = 4 \cdot \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2} \right]$$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{1+\ln(1-x)}{1-x}$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x} - (-1)\cdot(1+\ln(1-x))}{(1-x)^2} = 4 \cdot \frac{-1+1+\ln(1-x)}{(1-x)^2} = 4 \cdot \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

G_f ist streng monoton steigend für $x \in]-\infty; 0]$

G_f ist streng monoton fallend für $x \in [0; 1[$

$f(0) = 4 \cdot \frac{1+\ln(1)}{1} = 4 \quad \Rightarrow \quad HP(0|4)$

x		0		1
$4\cdot\ln(1-x)$	+		−	‖
$(1-x)^2$	+		+	‖
$f'(x)$	+		−	‖
G_f	↗	HP	↘	‖

3 1.4 Bestimmen Sie die Wertemenge der Funktion f mithilfe bisheriger Ergebnisse.

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) \to -\infty \\ HP(0|4) \\ G_f \text{ ist stetig in } \mathbb{D}_f \end{array}\right\} \Rightarrow \backslash W_f = \left]-\infty; 4\right]$$

8 1.5 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und ermitteln Sie die exakten Koordinaten seines Wendepunktes W.

$$f'(x) = 4\cdot\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2} = 4\cdot\frac{\ln(1-x)}{1-2x+x^2}$$

$$f''(x) = 4\cdot\frac{(1-x)^2\cdot\frac{-1}{1-x} - \ln(1-x)\cdot 2\cdot(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) = 4\cdot\frac{-(1-x)+2\cdot(1-x)\cdot\ln(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) = 4\cdot\frac{(1-x)\left[-1+2\cdot\ln(1-x)\right]}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) = 4\cdot\frac{2\cdot\ln(1-x)-1}{(1-x)^3} = 0$$

$$\Rightarrow\ 2\ln(1-x)-1=0 \ \Rightarrow\ 2\ln(1-x)=1 \ \Rightarrow\ \ln(1-x)=\tfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ 1-x=\sqrt{e} \ \Rightarrow\ x=1-\sqrt{e}$$

x		$1-\sqrt{e}$		1
$4\cdot\left(2\ln(1-x)-1\right)$	$+$		$-$	‖
$(1-x)^3$	$+$		$+$	‖
$f''(x)$	$+$		$-$	‖
G_f	lk	WP	rk	‖

G_f ist linksgekrümmt für $x \in \left]-\infty; 1-\sqrt{e}\right]$

G_f ist rechtsgekrümmt für $x \in \left[1-\sqrt{e}; 1\right[$

$$f\left(1-\sqrt{e}\right) = 4\cdot\frac{1+\ln\left(1-\left(1-\sqrt{e}\right)\right)}{1-\left(1-\sqrt{e}\right)} = 4\cdot\frac{1+\ln\left(\sqrt{e}\right)}{\sqrt{e}} = 4\cdot\frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = \frac{6}{\sqrt{e}} \ \Rightarrow\ WP\left(1-\sqrt{e}\,\middle|\,\frac{6}{\sqrt{e}}\right)$$

5 1.6 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt W und berechnen sie deren Schnittpunkt mit der x-Achse.

$\left[\text{mögliches Teilergebnis}: t: y = \tfrac{2}{e} \cdot x + \tfrac{8\cdot\sqrt{e}-2}{e}\right]$

$$f'\left(1-\sqrt{e}\right) = 4 \cdot \frac{\ln\left(1-\left(1-\sqrt{e}\right)\right)}{\left(1-\left(1-\sqrt{e}\right)\right)^2} = 4 \cdot \frac{\ln\left(\sqrt{e}\right)}{\left(\sqrt{e}\right)^2} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{2}{e}$$

$WP\left(1-\sqrt{e} \mid \frac{6}{\sqrt{e}}\right)$ und $m = \frac{2}{e}$ in $y = mx + t$ einsetzen:

$$\frac{6}{\sqrt{e}} = \frac{2}{e} \cdot \left(1-\sqrt{e}\right) + t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{6}{\sqrt{e}} - \frac{2}{e} \cdot \left(1-\sqrt{e}\right) = \frac{6\sqrt{e}}{e} - \frac{2-2\sqrt{e}}{e} = \frac{8\sqrt{e}-2}{e}$$

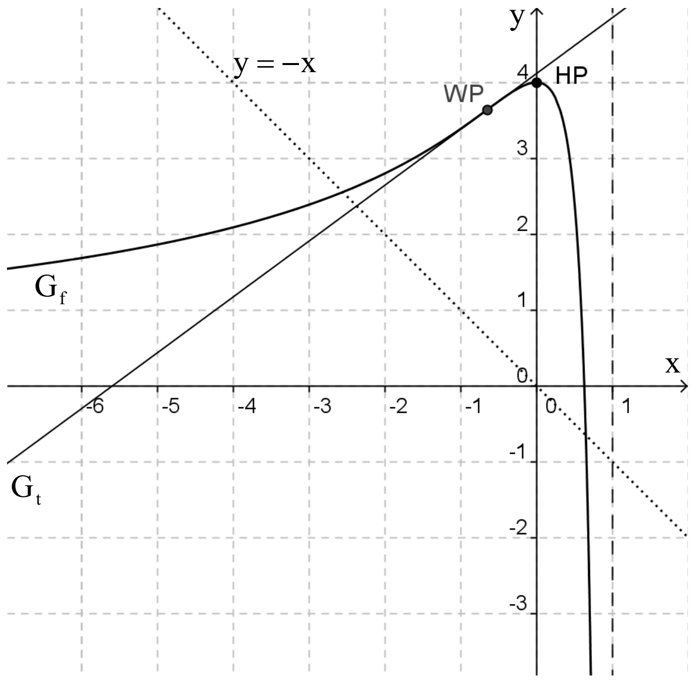
Somit folgt für die Tangente:

$$t: y = \frac{2}{e} \cdot x + \frac{8\sqrt{e}-2}{e}$$

Man benötigt noch die Nullstelle der Wendetangente:

$$\frac{2}{e} \cdot x + \frac{8\sqrt{e}-2}{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{e} \cdot x = -\frac{8\sqrt{e}-2}{e} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2-8\sqrt{e}}{2} = 1-4\sqrt{e} \quad (\approx -5{,}56)$$

4 1.7 Zeichnen Sie mithilfe vorliegender Ergebnisse den Graphen der Funktion f und die Tangente t für $-6 \le x \le 0,7$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$.



8 1.8 Im zweiten Quadranten liegt ein Punkt $P(k; f(k))$ auf dem Graphen von f, dessen Koordinaten die Bedingung $f(k) = -k$ erfüllen. Entnehmen Sie Ihrem Graphen einen geeigneten Startwert k_0 und berechnen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für die Stelle k. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch und geben Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.

Aus $f(k) = -k$ folgt:

$$f(k) = -k$$
$$4 \cdot \frac{1 + \ln(1-k)}{1-k} = -k$$
$$4 \cdot (1 + \ln(1-k)) = -k \cdot (1-k)$$
$$4 + 4\ln(1-k) = k^2 - k$$
$$4 + 4\ln(1-k) - k^2 + k = 0$$

Man setzt nun $h(k) = 4 + 4\ln(1-k) - k^2 + k$ und erhält:

$h'(x) = 4 \cdot \frac{-1}{1-k} - 2k + 1 = 1 - 2k - \frac{4}{1-k}$

Als geeigneten Startwert wählt man $k_0 = -2,5$ (da die Winkelhalbierende des 2. und 4. Quadranten den Graphen der Funktion f bei $x = -2,5$ in etwa schneidet)

Nun gilt: $k_{n+1} = k_n - \dfrac{h(k_n)}{h'(k_n)}$

Somit folgt:

i	k_i	$h(k_i)$	$h'(k_i)$
0	$-2,5$	0,261	4,857
1	$-2,554$	$-0,005$	4,983
2	$-2,550$		

7 1.9 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto -2\cdot\left[\ln(1-x)\right]^2 - 4\cdot\ln(1-x)$ in ihrer Definitionsmenge $\mathbb{D}_F = \mathbb{D}_f$ eine Stammfunktion der Funktion f ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes, das vom Graphen von f, der Tangente t und der y-Achse eingeschlossen wird. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

$$F(x) = -2\cdot\left[\ln(1-x)\right]^2 - 4\cdot\ln(1-x)$$

$$F'(x) = -2\cdot 2\cdot\ln(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x} - 4\cdot\frac{-1}{1-x}$$

$$F'(x) = 4\cdot\frac{\ln(1-x)}{1-x} + 4\cdot\frac{1}{1-x}$$

$$F'(x) = 4\cdot\frac{1+\ln(1-x)}{1-x}$$

$$F'(x) = f(x)$$

Somit ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Für die Fläche gilt:

$$A = \int_{1-\sqrt{e}}^{0}\left(t(x) - f(x)\right)dx$$

$$A = \int_{1-\sqrt{e}}^{0}\left(\frac{2}{e}\cdot x + \frac{8\sqrt{e}-2}{e} - 4\cdot\frac{1+\ln(1-x)}{1-x}\right)dx$$

$$A = \left[\frac{1}{e}\cdot x^2 + \frac{8\sqrt{e}-2}{e}\cdot x - \left(-2\cdot\left[\ln(1-x)\right]^2 - 4\cdot\ln(1-x)\right)\right]_{1-\sqrt{e}}^{0}$$

$$A = \left[\frac{1}{e}\cdot x^2 + \frac{8\sqrt{e}-2}{e}\cdot x + 2\cdot\left[\ln(1-x)\right]^2 + 4\cdot\ln(1-x)\right]_{1-\sqrt{e}}^{0}$$

$$A = \left[0+0+2\cdot\left[\ln(1)\right]^2 + 4\cdot\ln(1)\right] - \left[\frac{1}{e}\cdot\left(1-\sqrt{e}\right)^2 + \frac{8\sqrt{e}-2}{e}\cdot\left(1-\sqrt{e}\right) + 2\cdot\left[\ln\left(1-\left(1-\sqrt{e}\right)\right)\right]^2 + 4\cdot\ln\left(1-\left(1-\sqrt{e}\right)\right)\right]$$

$$A = [0-0] - \left[\frac{1}{e}\cdot\left(1-2\sqrt{e}+e\right) + \frac{8\sqrt{e}-2-8e+2\sqrt{e}}{e} + 2\cdot\left[\ln\left(\sqrt{e}\right)\right]^2 + 4\cdot\ln\left(\sqrt{e}\right)\right]$$

$$A = -\left[\frac{1}{e} - \frac{2}{\sqrt{e}} + 1 + \frac{8}{\sqrt{e}} - \frac{2}{e} - 8 + \frac{2}{\sqrt{e}} + 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 4\cdot\tfrac{1}{2}\right]$$

$$A = -\left[-\frac{1}{e} + \frac{8}{\sqrt{e}} - 7 + \tfrac{1}{2} + 2\right]$$

$$A = 4,5 + \frac{1}{e} - \frac{8}{\sqrt{e}}$$

$$A \approx 0,016$$

(Natürlich kann man sich die Berechung des exakten Wertes sparen, es reicht, wenn man die Integrationsgrenzen in die Stammfunktion eingibt. Wenn man dabei dann keinen Fehler macht, kommt dann schon das richtige Ergebnis heraus!)

3 2.0 Das Hinterrad eines Traktors übt auf den Ackerboden an der Oberfläche einen Druck von $4{,}0 \cdot 10^4\,\text{Pa}$ aus. Der Druck nimmt mit zunehmender Tiefe unter der Oberfläche ab und beträgt in $1{,}0\,\text{m}$ Tiefe nur noch ein Viertel des Wertes an der Oberfläche.
Für die Abhängigkeit des Drucks p in Pascal (Pa) von der Tiefe x in Metern gilt in einem mathematischen Modell die Funktionsgleichung
$p(x) = a \cdot e^{-bx^2}$, wobei $x \geq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$.
Auf das Mitführen der Einheiten kann verzichtet werden.

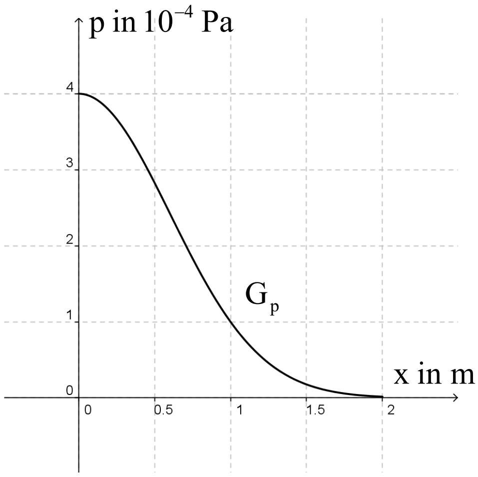
3 2.1 Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b.
$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: a = 4{,}0 \cdot 10^4, b = 2 \cdot \ln(2)\right]$

An der Oberfläche gilt: $p(0) = a \cdot e^0 = 4{,}0 \cdot 10^4 \quad \Rightarrow \quad a = 4{,}0 \cdot 10^4$

In der Tiefe $x = 1$ gilt:
$p(1) = 4{,}0 \cdot 10^4 e^{-b} = \frac{1}{4} \cdot 4{,}0 \cdot 10^4 \quad \Rightarrow \quad e^{-b} = \frac{1}{4}$
$\Rightarrow \quad -b = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad b = -\ln\left(2^{-2}\right) \quad \Rightarrow \quad b = 2\ln(2)$

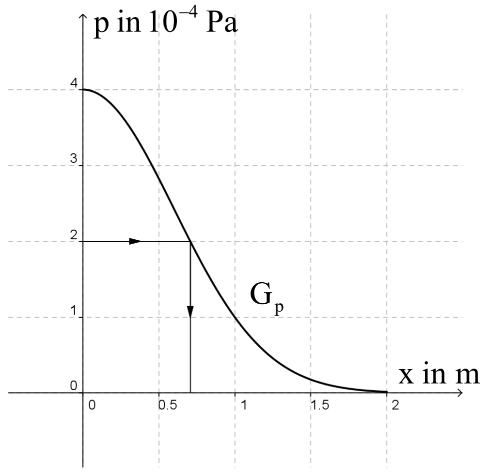
Somit folgt: $p(x) = 4{,}0 \cdot 10^4 e^{-2x^2 \cdot \ln(2)}$

3 2.2 Stellen Sie den Druck p in Abhängigkeit von der Tiefe x für $0 \leq x \leq 1{,}5$ graphisch dar. Wählen Sie dazu selbst einen geeigneten Maßstab.



4 2.3 Entnehmen Sie Ihrem Diagramm die ungefähre Tiefe, in der der Druck halb so groß ist wie an der Oberfläche, und berechnen Sie dann diese Tiefe genau.

Die Hälfte des Drucks an der Oberfläche beträgt $2{,}0 \cdot 10^{-4}$.



Dem Diagramm ist somit zu entnehmen, dass die Tiefe in etwa $x_1 = 0{,}7$ beträgt

Rechnung:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 2{,}0 \cdot 10^4 \\
4{,}0 \cdot 10^4 e^{-2x^2 \cdot \ln(2)} &= 2{,}0 \cdot 10^4 \\
e^{-2x^2 \cdot \ln(2)} &= \tfrac{1}{2} \\
-2x^2 \cdot \ln(2) &= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
-2x^2 \cdot \ln(2) &= \ln\left(2^{-1}\right) \\
-2x^2 \cdot \ln(2) &= -\ln(2) \\
2x^2 &= 1 \\
x^2 &= \tfrac{1}{2} \\
x_{1/2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Da nur die positive Lösung einen Sinn macht, gilt: $x_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \approx 0{,}707$

4 2.4 Berechnen Sie die lokale Änderungsrate des Drucks in $0{,}50\,\text{m}$ Tiefe.

$$p(x) = 4{,}0 \cdot 10^4 e^{-2x^2 \cdot \ln(2)}$$

Die lokale Änderungsrate gibt die 1. Ableitung der Funktion $p(x)$ an.

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= 4{,}0 \cdot 10^4 e^{-2x^2 \cdot \ln(2)} \cdot \left(-2 \cdot 2x \cdot \ln(2)\right) \\
p'(x) &= -16 \cdot 10^4 \cdot \ln(2) \cdot x \cdot e^{-2x^2 \cdot \ln(2)} \\
p'(0{,}5) &= -16 \cdot 10^4 \cdot \ln(2) \cdot 0{,}5 \cdot e^{-2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot \ln(2)} \\
p'(0{,}5) &= -8{,}0 \cdot 10^4 \cdot \ln(2) \cdot e^{-0{,}5 \cdot \ln(2)} \\
p'(0{,}5) &= -3{,}9 \cdot 10^4
\end{aligned}
$$

8 2.5 Bestimmen Sie, in welcher Tiefe die lokale Änderungsrate des Drucks betragsmäßig am größten ist, und berechnen Sie diese lokale Änderungsrate.

Hierzu bildet man die 1. Ableitung von $p'(x)$, also $p''(x)$

$$p'(x) = -16\cdot 10^4\cdot \ln(2)\cdot x\cdot e^{-2x^2\cdot\ln(2)}$$

$$p''(x) = -16\cdot 10^4\cdot \ln(2)\cdot e^{-2x^2\cdot\ln(2)} + \left(-16\cdot 10^4\cdot \ln(2)\cdot x\cdot e^{-2x^2\cdot\ln(2)}\cdot\left(-4x\cdot\ln(2)\right)\right)$$

$$p''(x) = -16\cdot 10^4\cdot \ln(2)\cdot e^{-2x^2\cdot\ln(2)} + 16\cdot 10^4\cdot\left(\ln(2)\right)^2\cdot 4x^2\cdot e^{-2x^2\cdot\ln(2)}$$

$$p''(x) = -16\cdot 10^4\cdot \ln(2)\cdot e^{-2x^2\cdot\ln(2)}\left(1-4\ln(2)\cdot x^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow\quad 1-4\ln(2)\cdot x^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 4\ln(2)\cdot x^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad x^2 = \frac{1}{4\ln(2)} \quad\Rightarrow\quad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4\ln(2)}}$$

Da diese Nullstellen einfach sind, hat man hier für beide Lösungen ein relatives Extremum.

Da auch hier nur die positive Lösung einen Sinn macht gilt: $x_1 = \sqrt{\frac{1}{4\ln(2)}} \approx 0,601$

Somit ist in einer Tiefe von $x_1 = \sqrt{\frac{1}{4\ln(2)}} \approx 0,601$ die Änderungsrate betragsmäßig am größten.

(Man muss hier nicht die Art des relativen Extremum bestimmen, da es ja egal ist ob es maximal oder minimal ist.)

$$\left|p'\left(\sqrt{\frac{1}{4\ln(2)}}\right)\right| = \left|-16\cdot 10^4\cdot\ln(2)\cdot\sqrt{\frac{1}{4\ln(2)}}\cdot e^{-2\cdot\frac{1}{4\ln(2)}\cdot\ln(2)}\right| =$$

$$= \left|-8\cdot 10^4\cdot\sqrt{\ln(2)}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right| = \frac{8\cdot 10^4\cdot\sqrt{\ln(2)}}{\sqrt{e}} \approx 4,0\cdot 10^4$$

70