

2010 A II Angabe

BE 1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$ in der vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ unabhängigen Definitionsmenge $ID_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4 1.1 Ermitteln Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a .

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2} \Rightarrow x^2 - ax + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

Die Anzahl der Nullstellen hängt von der Diskriminante $D = a^2 - 4$ ab

$$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a_{1/2} = \pm 2$$

Somit folgt für die Anzahl und Lage der Nullstellen:

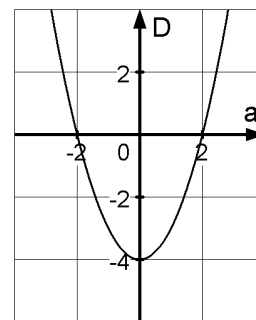
Keine Nullstellen für $a \in]-2; 2[$

Eine Nullstelle für $a_1 = -2$ mit der Nullstelle $x_1 = -1$

und für $a_2 = 2$ mit der Nullstelle $x_1 = 1$

Zwei Nullstellen für $a \in \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$ mit den Nullstellen

$$x_{1/2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$



6 1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ in der Nähe der Definitionslücke sowie für $|x| \rightarrow \infty$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - ax + 1}{x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0-h)^2 - a(0-h) + 1}{(0-h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{h^2 + ah + 1}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{h^2}_{\rightarrow 0^0}} \rightarrow \infty$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) \rightarrow \infty$ da Polstelle 2. Ordnung (Pol ohne Vorzeichenwechsel!)

Somit hat man eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{x^2 - ax + 1}^{\rightarrow \infty}}{\underbrace{x^2}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{2x - a}^{\rightarrow \infty}}{\underbrace{2x}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{x^2 - ax + 1}^{\rightarrow \infty}}{\underbrace{x^2}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{2x - a}^{\rightarrow \infty}}{\underbrace{2x}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$$

Somit hat man eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 1$

14 1.3

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die jeweils maximalen Monotonieintervalle der Funktion f_a , geben Sie diejenigen Werte von a an, für die der jeweilige Graph von f_a einen Extrempunkt hat, und ermitteln Sie dessen Art und Lage in Abhängigkeit von a .
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a = 0$, $a > 0$ und $a < 0$.

$$\left[\text{mögliches Teilergebnis: } f_a'(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right]$$

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$$

$$f_a'(x) = \frac{x^2 \cdot (2x - a) - (x^2 - ax + 1) \cdot 2x}{x^4}$$

$$f_a'(x) = \frac{2x^3 - ax^2 - 2x^3 + 2ax^2 - 2x}{x^4}$$

$$f_a'(x) = \frac{ax^2 - 2x}{x^4}$$

$$f_a'(x) = \frac{x(ax - 2)}{x^4}$$

$$f_a'(x) = \frac{ax - 2}{x^3}$$

1. Fall: $a = 0$

Dann gilt: $f_0'(x) = \frac{-2}{x^3} > 0$ für $x < 0$ und $f_0'(x) = \frac{-2}{x^3} < 0$ für $x > 0$

G_{f_0} ist sms für $x \in]-\infty; 0[$ und smf für $x \in]0; \infty[$

2. Fall: $a < 0$

$$f_a'(x) = \frac{ax - 2}{x^3} = 0 \Rightarrow ax - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{a} \quad (\text{Da } a < 0 \text{ ist auch } x_1 = \frac{2}{a} < 0)$$

		$\frac{2}{a}$	0	x
$ax - 2$	+	-	-	
x^3	-	-	+	
$f_a'(x)$	-	+	-	
G_{f_a}	↘	↗	↘	
		TP	n.d.	

G_{f_a} ist sms für $x \in [\frac{2}{a}; 0[$ und smf für $x \in]-\infty; \frac{2}{a}]$ und für $x \in]0; \infty[$

$$f_a\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{\left(\frac{2}{a}\right)^2 - a \cdot \frac{2}{a} + 1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{\frac{4}{a^2} - 2 + 1}{\frac{4}{a^2}} = \frac{\frac{4}{a^2} - 1}{\frac{4}{a^2}} = \frac{\left(\frac{4}{a^2} - 1\right) \cdot a^2}{\frac{4}{a^2} \cdot a^2} = \frac{4 - a^2}{4} = 1 - \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow \text{TP}\left(\frac{2}{a} \mid 1 - \frac{1}{4}a^2\right)$$

3. Fall: $a > 0$

$$f_a'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{a} \quad (\text{Da } a > 0 \text{ ist auch } x_1 = \frac{2}{a} > 0)$$

		0	$\frac{2}{a}$	
$ax - 2$		-	-	+
x^3		-	+	+
$f_a'(x)$		+	-	+
G_{f_a}		↗	↘	↗
		n.d.	TP	

G_{f_a} ist sms für $x \in]-\infty; 0[$ und für $x \in [\frac{2}{a}; \infty[$ und smf für $x \in [0; \frac{2}{a}]$

$$f_a(\frac{2}{a}) = 1 - \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow \text{TP}(\frac{2}{a} | 1 - \frac{1}{4}a^2)$$

- 5 1.4 Untersuchen Sie, für welche Werte von a der Graph von f_a einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen die dessen Koordinaten in Abhängigkeit von a .

$$f_a''(x) = \frac{x^3 \cdot a - (ax - 2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 \cdot (ax - 3 \cdot (ax - 2))}{x^6} = \frac{ax - 3ax + 6}{x^4} = \frac{6 - 2ax}{x^4}$$

Keine Wendepunkte erhält man für $a = 0$, da gilt: $f_0''(x) = \frac{6}{x^4} \neq 0$

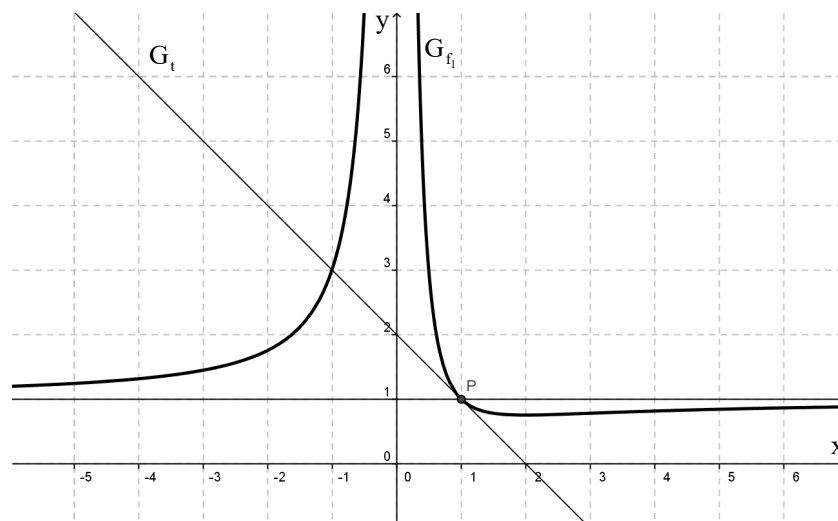
Für $a \neq 0$ folgt:

$$f_a''(x) = \frac{6 - 2ax}{x^4} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{a} \text{ ist einfache Nullstelle des Zählers (und keine Nullstelle}$$

des Nenners), somit hat $f_a''(x)$ an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel und der Graph einen Wendepunkt.

$$f_a(\frac{3}{a}) = \frac{(\frac{3}{a})^2 - a \cdot (\frac{3}{a}) + 1}{(\frac{3}{a})^2} = \frac{\frac{9}{a^2} - 3 + 1}{\frac{9}{a^2}} = \frac{(\frac{9}{a^2} - 2) \cdot a^2}{\frac{9}{a^2} \cdot a^2} = 1 - \frac{2}{9}a^2 \Rightarrow \text{WP}(\frac{3}{a} | 1 - \frac{2}{9}a^2)$$

- 4 1.5 Setzen sie nun $a = 1$ und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weitere geeigneter Funktionswerte für $-5 \leq x \leq 5$ den Graphen von f_1 mit seinen Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm .



- 3 1.6 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t im Punkt $P(1; f_1(1))$ an den Graphen von f_1 und zeichnen Sie die Tangente t in das Diagramm der Aufgabe 1.5 ein.
 [mögliches Teilergebnis : $t : y = -x + 2$]

$$f_1(1) = \frac{1^2 - 1 \cdot 1 + 1}{1^2} = 1 \Rightarrow P(1|1)$$

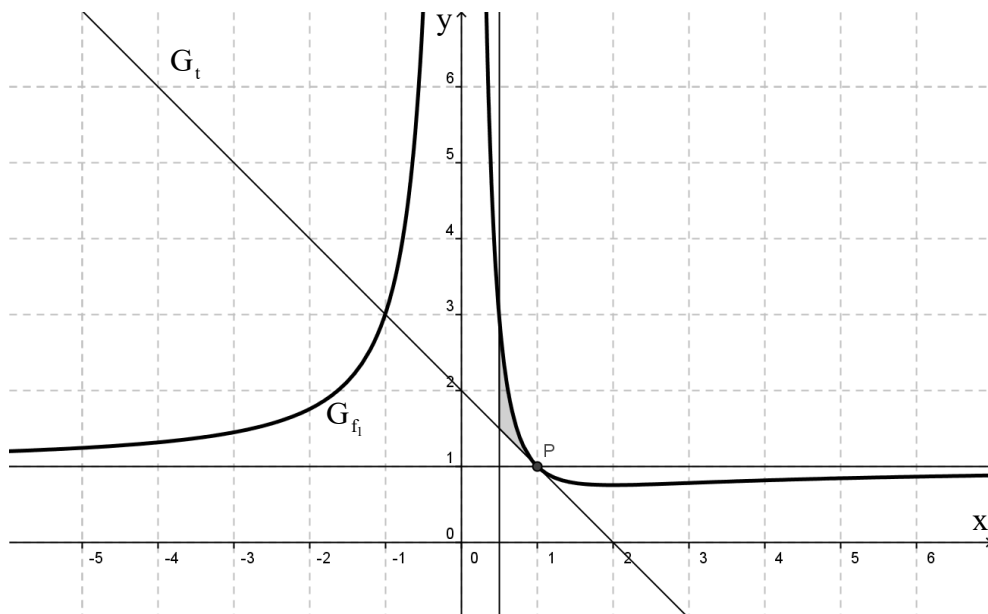
$$f_1'(1) = \frac{1 \cdot 1 - 2}{1^3} = -1 = m_t$$

$$\text{in } y = mx + t \text{ einsetzen: } 1 = -1 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 2$$

$$\text{Tangentengleichung: } t : y = -x + 2$$

- 5 1.7 Für $0 < k < 1$ schließen die Gerade mit der Gleichung $x = k$, der Graph von f_1 und die Tangente t ein endliches Flächenstück A_k ein.
 Markieren Sie dieses Flächenstück für $k = 0,5$ im Diagramm der Aufgabe 1.5 und zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $A(k)$ der Fläche A_k in Abhängigkeit von k gilt:

$$A(k) = \frac{k^2 + k \cdot \ln(k) + 1}{k} - \frac{k^2 + 3}{2}$$



$$\text{Es gilt: } f_1(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$A(k) = \int_k^1 (f_1(x) - t(x)) dx$$

$$A(k) = \int_k^1 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x - 2 \right) dx$$

$$A(k) = \int_k^1 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x - 1 \right) dx$$

$$A(k) = \left[-\ln(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_k^1$$

$$A(k) = \left(-\ln(1) - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 \right) - \left(-\ln(k) - \frac{1}{k} + \frac{1}{2}k^2 - k \right)$$

$$A(k) = -1 + \frac{1}{2} - 1 + \ln(k) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}k^2 + k$$

$$A(k) = -\frac{3}{2} + \ln(k) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}k^2 + k$$

$$A(k) = k + \ln(k) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}$$

$$A(k) = \frac{(k + \ln(k) + \frac{1}{k}) \cdot k}{k} - \frac{1}{2}(k^2 + 3)$$

$$A(k) = \frac{k^2 + k \cdot \ln(k) + 1}{k} - \frac{k^2 + 3}{2}$$

6 1.8 Beweisen Sie zunächst, dass gilt: $\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} [k \cdot \ln(k)] = 0$. Untersuchen Sie dann, ob der

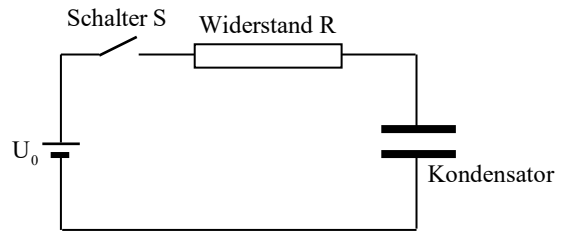
Grenzwert $\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} A(k)$ existiert, und erklären Sie, was Ihr Ergebnis geometrisch bedeutet.

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} [k \cdot \ln(k)] = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} \underbrace{\overbrace{\ln(k)}^{\rightarrow -\infty}}_{\rightarrow -\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{k}}_{\rightarrow \infty} \stackrel{L'H}{=} \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} \frac{1}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} \left(-\frac{1}{k} \cdot \frac{k^2}{1} \right) = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} (-k) = 0$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} A(k) = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} \left(\frac{k^2 + k \cdot \ln(k) + 1}{k} - \frac{k^2 + 3}{2} \right) = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} \underbrace{\frac{\overbrace{k^2 + k \cdot \ln(k) + 1}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{k}_{\rightarrow 0}}}_{\rightarrow \infty} - \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k > 0}} \underbrace{\frac{k^2 + 3}{2}}_{\rightarrow \frac{3}{2}} \rightarrow \infty$$

Bedeutung: Die eingeschlossene Fläche wird unendlich groß!

2.0 Ein Doppelschicht-Kondensator ist entsprechend der gegebenen Schaltung mit einer Gleichspannungsquelle verbunden, die eine konstante Spannung $U_0 = 5,00 \text{ V}$ liefert. Der Widerstand R des Stromkreises beträgt 10Ω .



Wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Schalter S geschlossen, beginnt der Kondensator sich aufzuladen. Der zeitliche Verlauf der am Kondensator anliegenden Spannung in Volt (V) wird beschrieben durch die Gleichung:
 $U_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\alpha t})$, wobei $\alpha = 2,50 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

3 2.1 Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} U_C(t)$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Grenzwerts.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} U_0 \cdot (1 - \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\rightarrow 0}) = U_0 = 5,00 \text{ V}$$

Bedeutung: Der Kondensator trägt nach sehr langer Zeit die Ladung $U_0 = 5,00 \text{ V}$.

5 2.2 Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Kondensatorspannung $U_C(t)$ sowie für die am Widerstand R anliegende Spannung $U_R(t)$ für $0 \leq t \leq 100 \text{ s}$ mit einer Schrittweite von $\Delta t = 20 \text{ s}$ und stellen Sie $U_C(t)$ und $U_R(t)$ in einem gemeinsamen Diagramm graphisch dar.

Hinweis: Offensichtlich gilt zu jedem Zeitpunkt $U_0 = U_C + U_R$.

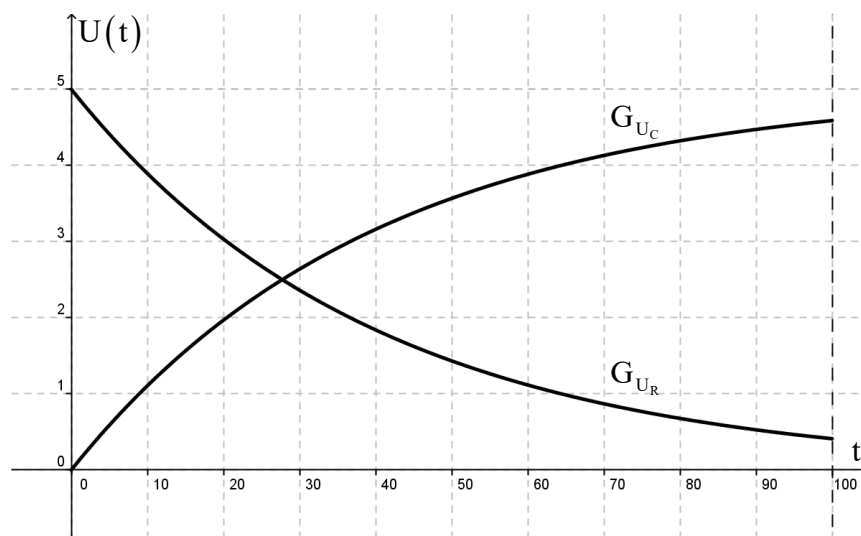
Maßstab: 1cm entspricht 10s bzw. 1V.

Es gilt:

$$U_0 = U_C + U_R \Rightarrow U_R = U_0 - U_C = U_0 - U_0 \cdot (1 - e^{-\alpha t}) = U_0 - U_0 + U_0 \cdot e^{-\alpha t} = U_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

$$U_C(t) = 5 \text{ V} \cdot (1 - e^{-0,025 \frac{1}{\text{s}} \cdot t}) \quad U_R(t) = 5 \text{ V} \cdot e^{-0,025 \frac{1}{\text{s}} \cdot t}$$

t in s	0	20	40	60	80	100
$U_C(t)$ in V	0	1,96	3,16	3,88	4,32	4,59
$U_R(t)$ in V	5	3,03	1,84	1,12	0,68	0,41



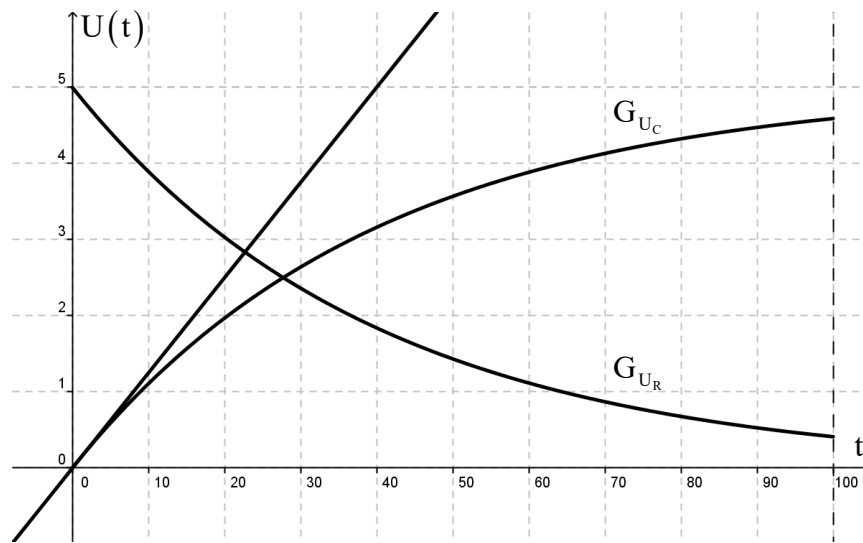
- 5 2.3 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Spannung U_C zur Zeit $t_0 = 0$ sowie ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$. Stellen Sie eine Gleichung der (einseitigen) Tangente an den Graphen von U_C im Ursprung auf und zeichnen sie diese Tangente in das Diagramm der Aufgabe 2.2 ein.

$$U_C(t) = 5 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-0,025 \frac{1}{s} \cdot t}\right)$$

$$\frac{U_C(t)}{dt} = 0,125 \frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot e^{-0,025 \frac{1}{s} \cdot t} \Rightarrow \frac{U_C(0)}{dt} = 0,125 \frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot e^{-0,025 \frac{1}{s} \cdot 0} = 0,125 \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_C(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} 0,125 \frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot e^{-0,025 \frac{1}{s} \cdot t} = 0 \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

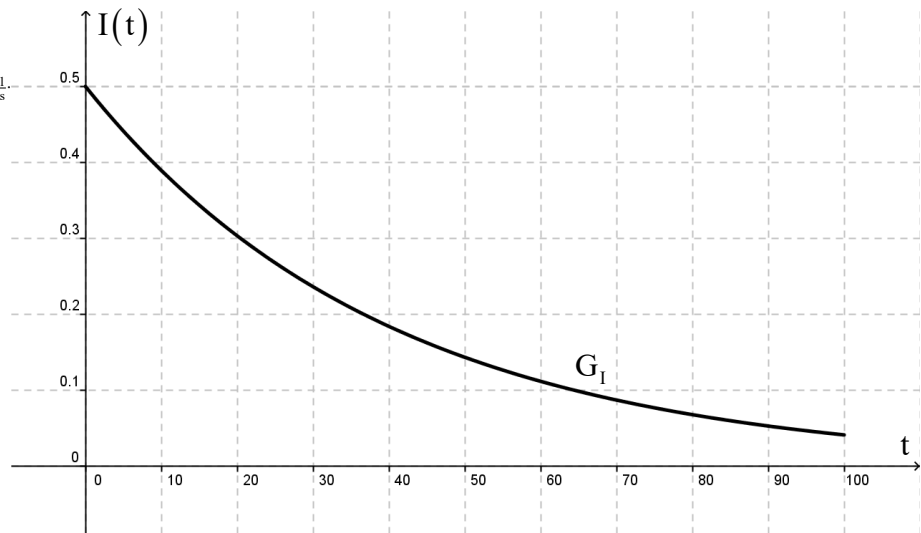
$$\text{Tangente: } y = 0,125 \frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot t$$



- 3 2.4 In dem gegebenen Stromkreis gilt für die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t die Gleichung: $I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$
Stellen Sie in einem neuen Diagramm die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t graphisch dar.

$$I(t) = \frac{5 \text{ V}}{10 \Omega} \cdot e^{-0,025 \frac{1}{s} \cdot t}$$

$$I(t) = 0,5 \text{ A} \cdot e^{-0,025 \frac{1}{s} \cdot t}$$



7 2.5 Die Stromstärke I ist definiert als die Ableitung der transportierten Ladung Q nach der Zeit

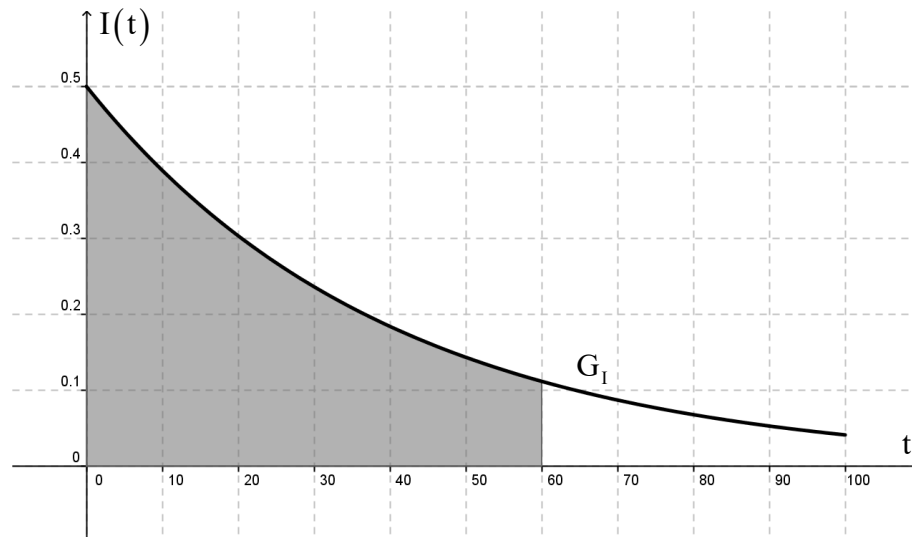
$$t: I(t) = \dot{Q}(t)$$

Ermitteln Sie eine Gleichung, die den zeitlichen Verlauf der Ladung $Q(t)$ des Kondensators angibt, berechnen Sie $Q(60\text{s})$ und veranschaulichen Sie diesen Wert im Diagramm der Aufgabe 2.4. Berechnen Sie außerdem $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$.

$$Q(t) = \int_0^t I(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_0^t 0,5 \text{ A} \cdot e^{-0,025 \frac{1}{\text{s}} \cdot \tilde{t}} d\tilde{t} = \left[-20 \text{ As} \cdot e^{-0,025 \frac{1}{\text{s}} \cdot \tilde{t}} \right]_0^t$$

$$= -20 \text{ As} \cdot e^{-0,025 \frac{1}{\text{s}} \cdot t} - (-20 \text{ As}) = 20 \text{ As} \left(1 - e^{-0,025 \frac{1}{\text{s}} \cdot t} \right)$$

$$Q(60\text{s}) = 20 \text{ As} \cdot \left(1 - e^{-0,025 \frac{1}{\text{s}} \cdot 60\text{s}} \right) = 20 \text{ As} \cdot \left(1 - e^{-1,5} \right) \approx 15,54 \text{ As}$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 20 \text{ As} \left(1 - \underbrace{e^{-0,025 \frac{1}{\text{s}} \cdot t}}_{\rightarrow 0} \right) = 20 \text{ As}$$