2008 A I – Lösung

1.1
$$p(h_H) = 1013\cdot 2^{-\frac{h_H}{5,5}} = \tfrac{1}{2}\cdot 1013$$
$$2^{-\frac{h_H}{5,5}} = 2^{-1}$$
$$-\tfrac{h_H}{5,5} = -1$$
$$h_H = 5,5$$

1.2
$$p(h_A + h_H) = p(h_A + 5,5) = 1013\cdot 2^{-\frac{h_A+5,5}{5,5}} = 1013\cdot 2^{-\frac{h_A}{5,5}-1} = 1013\cdot 2^{-\frac{h_A}{5,5}}\cdot 2^{-1} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 1013\cdot 2^{-\frac{h_A}{5,5}} = \tfrac{1}{2}\cdot p(h_A)$$

1.3
$$p(h) < \tfrac{1}{1000}\cdot p(h_0 = 0)$$
$$1013\cdot 2^{-\frac{h}{5,5}} < 0,001\cdot 1013\cdot 2^0$$
$$2^{-\frac{h}{5,5}} < 0,001 \quad |\ln(...)$$
$$-\tfrac{h}{5,5}\cdot \ln 2 < \ln 0,001$$
$$-\tfrac{h}{5,5} < \tfrac{\ln 0,001}{\ln 2}$$
$$h > -5,5\cdot \tfrac{\ln 0,001}{\ln 2}$$
$$h > 54,8$$

1.4
$$1013\cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5}\cdot h} = 1013\cdot e^{\ln 0,5\cdot\frac{h}{5,5}} = 1013\cdot\left(e^{\ln 0,5}\right)^{\frac{h}{5,5}} = 1013\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5,5}} = 1013\cdot 2^{-\frac{h}{5,5}} = p(h)$$

oder auch:
$$p(h) = 1013\cdot 2^{-\frac{h}{5,5}} = 1013\cdot e^{\ln 2^{-\frac{h}{5,5}}} = 1013\cdot e^{\frac{h}{5,5}\cdot\ln 2^{-1}} = 1013\cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5}\cdot h}$$
$$\frac{dp(h)}{dh} = 1013\cdot\tfrac{\ln 0,5}{5,5}\cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5}\cdot h}$$

1.5
$$\frac{p(1)-p(0)}{1-0} = \frac{1013\cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5}\cdot 1} - 1013\cdot e^0}{1} = 1013\cdot(0,8816-1) = 1013\cdot(-0,1184) = -120,0$$

Die mittlerer Druckabnahme pro km von $h_0 = 0\,\text{km}$ bis $h = 1\,\text{km}$ beträgt $-120\,\text{hPa}$.
$$\frac{dp(1)}{dh} = 1013\cdot\tfrac{\ln 0,5}{5,5}\cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5}\cdot 1} = -127,67\cdot e^{-0,126} = -112,5$$

Die momentane Druckabnahme pro km in der Höhe $h = 1\,\text{km}$ beträgt $-112,5\,\text{hPa}$.

2.1 $f(x)=2\cdot\dfrac{1+\ln x}{x}=0 \;\Rightarrow\; 1+\ln x=0 \;\Rightarrow\; \ln x=-1 \;\Rightarrow\; x_N=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{\overbrace{1+\ln x}^{\to\infty}}{\underbrace{x}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{\overbrace{1+\ln x}^{\to-\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0}} \to -\infty$$

2.2 $f'(x)=2\cdot\dfrac{x\cdot\frac{1}{x}-(1+\ln x)}{x^2}=2\cdot\dfrac{1-1-\ln x}{x^2}=-2\cdot\dfrac{\ln x}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; \ln x=0 \;\Rightarrow\; x_E=1$

x	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$-2\cdot\ln x$	+		−
x^2	+		+
$f'(x)$	+		−
G_f	↗	HP	↘

$f(1)=2 \;\Rightarrow\; HP(1\,|\,2)$

G_f ist sms für $x\in\,]0\,;1]$

G_f ist smf für $x\in[1\,;\infty[$

2.3 $f''(x)=-2\cdot\dfrac{x^2\cdot\frac{1}{x}-2x\cdot\ln x}{x^4}=-2\cdot\dfrac{x(1-2\ln x)}{x^4}=-2\cdot\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=0$

$\Rightarrow\; 1-2\ln x=0 \;\Rightarrow\; \ln x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_W=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

x	$0 < x < \sqrt{e}$	$x = \sqrt{e}$	$x > \sqrt{e}$
$-2\cdot(1-2\ln x)$	−		+
x^3	+		+
$f''(x)$	−		+
G_f	rk	WP	lk

$f(\sqrt{e})=2\cdot\dfrac{1+\ln e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=2\cdot\dfrac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{e}}=\dfrac{3}{\sqrt{e}}$

$\Rightarrow\; WP\left(\sqrt{e}\,\middle|\,\frac{3}{\sqrt{e}}\right)$

2.4 Gerade durch $P(a\,|\,f(a))$ mit der Steigung $m=f'(a)=-2\cdot\dfrac{\ln a}{a^2}$

$2\cdot\dfrac{1+\ln a}{a}=-2\cdot\dfrac{\ln a}{a^2}\cdot a+t \qquad$ (aber $t=0$!)

$2\cdot\dfrac{1+\ln a}{a}=-2\cdot\dfrac{\ln a}{a}$

$1+\ln a=-\ln a$

$2\ln a=-1$

$\ln a=-\frac{1}{2}$

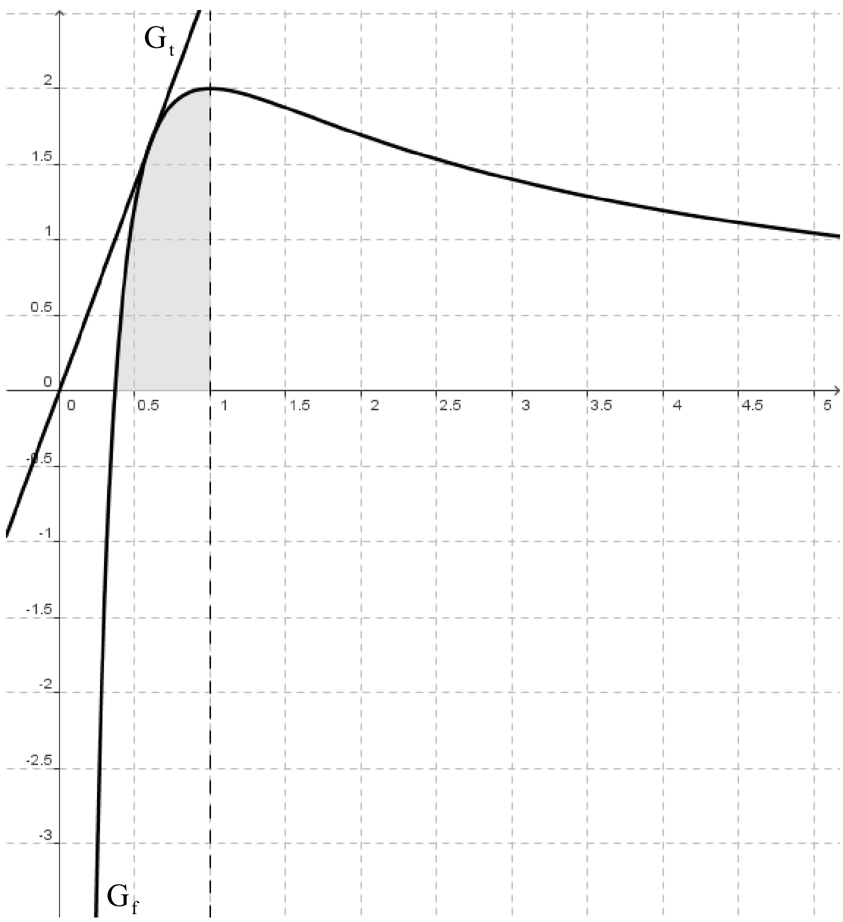
$a=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

$m=f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-2\cdot\dfrac{\ln e^{-\frac{1}{2}}}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=e$

Tangentengleichung: $y=e\cdot x$

2.5

x	0,25	$\frac{1}{e} \approx 0,37$	$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$	1	$\sqrt{e} \approx 1,65$	2	3	4	5
y	$-3,1$	0	$\sqrt{e} \approx 1,65$	2	$\frac{3}{\sqrt{e}} \approx 1,82$	1,7	1,4	1,2	1,0
		N	P	HP	WP				



2.6 $F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x + 2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x + 1) = 2 \cdot \dfrac{1 + \ln x}{x} = f(x)$

$HP(1 \mid 2) \in G_f$, somit gilt: $F''(1) = f'(1) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 1$ ist Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel!) von F''

$\Rightarrow$ G_F hat an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt.

$F'(1) = f(1) = 2 = m_W$

$\Rightarrow$ Wendepunkt von G_F hat die Steigung $m_W = 2$.

2.7 G_F ist smf für $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$

G_F ist sms für $x \in \left[\frac{1}{e}, \infty\right[$

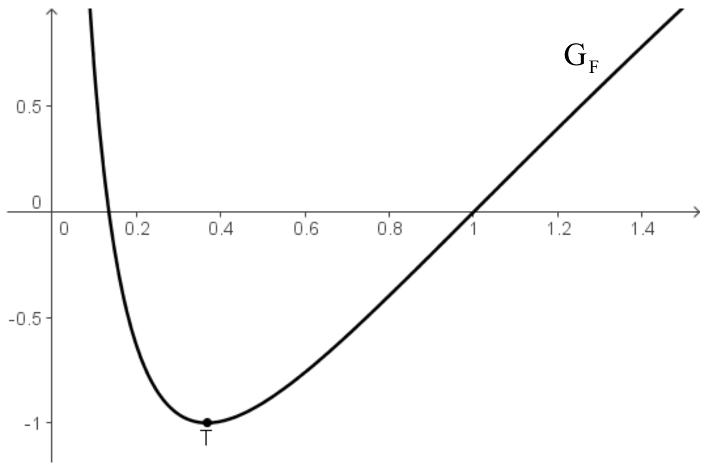
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\left((\ln x)^2 + 2\ln x\right) = \lim_{x\to\infty}\underbrace{(\ln x)^2}_{\to\infty} + 2\cdot\lim_{x\to\infty}\underbrace{\ln x}_{\to\infty} \to \infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} F(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\left((\ln x)^2 + 2\ln x\right) = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\underbrace{\ln x}_{\to-\infty}\cdot\underbrace{(\ln x + 2)}_{\to-\infty} \to \infty$$

$F\left(e^{-2}\right) = 0$

$F\left(e^{-1}\right) = F(0{,}37...) = -1$ TP von G_F

$F\left(e^{0}\right) = F(1) = 0$



2.8 $$A(b) = \int_{\frac{1}{e}}^{b} f(x)\,dx = \left[(\ln x)^2 + 2\cdot\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{b} = (\ln b)^2 + 2\cdot\ln b - \left(\left(\ln e^{-1}\right)^2 + 2\cdot\ln e^{-1}\right)$$

$$A(b) = (\ln b)^2 + 2\cdot\ln b - (1-2) = (\ln b)^2 + 2\cdot\ln b + 1$$

2.9 $$A(b) = (\ln b)^2 + 2\cdot\ln b + 1 = 9$$

$$(\ln b)^2 + 2\cdot\ln b - 8 = 0$$

Substitution: $\ln b = u$

$$u^2 + 2u - 8 = 0 \quad\Rightarrow\quad u_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2\pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

Rücksubstitution:

$\ln b = 2$ $\qquad \ln b = -4$

$b_1 = e^2$ $\qquad \left(b_2 = e^{-4} = \frac{1}{e^4} < \frac{1}{e}\right)$ nicht möglich!

Eine etwas genialere Lösung:

$$A(b) = (\ln b)^2 + 2\cdot\ln b + 1 = 9 \quad\Rightarrow\quad (\ln(b)+1)^2 = 9 \quad\Rightarrow\quad \ln(b)+1 = \pm 3$$

$$\Rightarrow\quad \ln(b) = \begin{cases} 2 & \Rightarrow\quad b_1 = e^2 \\ -4 & \Rightarrow\quad b_2 = e^{-4} < e^{-1} \quad \text{nicht möglich} \end{cases}$$

2.10 $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a) = \frac{1}{2} \cdot e^{-0,5} \cdot 2 \cdot \frac{1 + \ln e^{-0,5}}{e^{-0,5}} = 1 + \ln e^{-0,5} = 0,5$

$A(a) = A\left(e^{-0,5}\right) = \left(\ln e^{-0,5}\right)^2 + 2 \cdot \ln e^{-0,5} + 1 = 0,25 - 1 + 1 = 0,25$

$A_0 = A_\Delta - A(a) = 0,5 - 0,25 = 0,25$