

2008 A II Lösung

BE 1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto \frac{10}{1+e^x}$ in der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

4 1.1 Begründen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow \pm \infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_f an.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{\underbrace{1+e^x}_{\rightarrow \infty}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10}{\underbrace{1+e^x}_{\rightarrow 1}} = 10$$

Man hat zwei waagrechte Asymptoten: $y_1 = 0$ und $y_2 = 10$

4 1.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und geben Sie ihre Wertemenge an.

$$f(x) = \frac{10}{1+e^x}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{-10e^x}^{<0}}{\underbrace{(1+e^x)^2}_{>0}} < 0 \Rightarrow G_f \text{ ist smf in } \mathbb{D}_f$$

$$\mathbb{W}_f =]0;10[$$

6 1.3 Verschiebt man in einem kartesischen Koordinatensystem den Graphen G_f um 5 LE nach unten, so erhält man den Graphen G_{f^*} einer Funktion f^* . Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f^*(x) = -f^*(-x)$, und geben Sie die Bedeutung dieses Zusammenhangs für den Verlauf des Graphen G_f an.

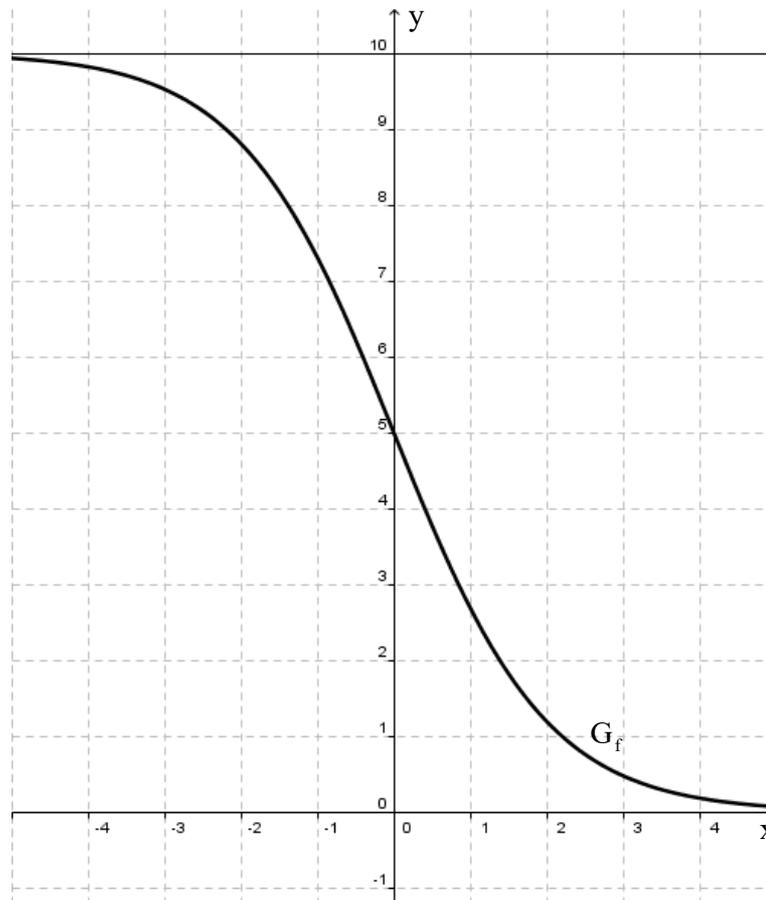
$$f^*(x) = f(x) - 5 = \frac{10}{1+e^x} - 5 = \frac{10 - 5(1+e^x)}{1+e^x} = \frac{5 - 5e^x}{1+e^x} = \frac{5(1-e^x)}{1+e^x}$$

$$f^*(-x) = \frac{5(1-e^{-x})}{1+e^{-x}} = \frac{5(1-e^{-x})e^x}{(1+e^{-x})e^x} = \frac{5(e^x-1)}{(e^x+1)} = \frac{-5(1-e^x)}{(1+e^x)} = -f^*(x)$$

Das bedeutet, dass der Graph der Funktion f^* punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

Schiebt man den Graph der Funktion f^* um 5 LE nach oben, so erhält man den Graph der Funktion f . Somit ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Punkt $P(0|5)$.

- 4 1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten für $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm.



- 1.5.0 Gegeben ist zusätzlich die Funktion $F : x \mapsto 10 \cdot x - 10 \cdot \ln(1 + e^x)$ in der Definitionsmenge $D_F = D_f$.
- 5 1.5.1 Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist, und berechnen Sie $\int_0^1 f(x) dx$. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

$$F(x) = 10 \cdot x - 10 \cdot \ln(1 + e^x)$$

$$F'(x) = 10 - 10 \cdot \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{10(1 + e^x) - 10e^x}{1 + e^x} = \frac{10 + 10e^x - 10e^x}{1 + e^x} = \frac{10}{1 + e^x} = f(x)$$

Somit ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

$$A = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 10 - 10 \ln(1 + e) - (0 - 10 \cdot \ln(2))$$

$$A = 10(1 + \ln(2) - \ln(1 + e)) = 10(\ln(e) + \ln(2) - \ln(1 + e)) = 10 \ln\left(\frac{2e}{1 + e}\right) \approx 3,80$$

- 7 1.5.2 Geben Sie das Steigungs- und das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion F an, bestimmen Sie die Gleichungen seiner Asymptoten und geben Sie die Wertemenge von F an.

Hinweis: Für $x \rightarrow \infty$ gilt $\ln(1 + e^x) \rightarrow x$.

Da $F'(x) = f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ sms in ID_F .

Da $F''(x) = f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ in ID_F rechtsgekrümmt.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (10 \cdot x - 10 \cdot \ln(1 + e^x)) = 10 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x - 10 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\ln(1 + e^x)}_{\rightarrow x} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow 10x}$

Somit hat man eine waagechte Asymptote mit der Gleichung: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (10 \cdot x - 10 \cdot \ln(1 + e^x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 10 \cdot x - 10 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\ln(1 + e^x)}_{\rightarrow 0} \rightarrow -\infty$$

Aus obiger Zeile erkennt man, dass $F(x)$ von der Form $F(x) = F_A(x) + R(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = 0$. Somit ist $F_A(x) = 10 \cdot x$ eine schiefe Asymptote von $F(x)$.

Für die Wertemenge von $F(x)$ gilt dann: $\setminus W_F =]-\infty; 0[$.

- 1.6.0 Gegeben ist zusätzlich die Funktion $g : x \mapsto \frac{10}{1 + e^{2-x}}$ in der Definitionsmenge

$D_g = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion g wird mit G_g bezeichnet. Außerdem ist bekannt, dass für die Ableitungsfunktion g' in der Definitionsmenge $D_{g'} = \mathbb{R}$ gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [10 - g(x)]$$

- 4 1.6.1 Begründen Sie mit Hilfe der gegebenen Funktionsgleichung von g' , dass in der gesamten Definitionsmenge D_g der Graph G_g streng monoton steigt.

$$g'(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [10 - g(x)] = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{1 + e^{2-x}} \cdot \left[10 - \frac{10}{1 + e^{2-x}} \right] = \frac{1}{1 + e^{2-x}} \cdot \left[\frac{10(1 + e^{2-x}) - 10}{1 + e^{2-x}} \right]$$

$$g'(x) = \frac{1}{1 + e^{2-x}} \cdot \left[\frac{10 \cdot e^{2-x}}{1 + e^{2-x}} \right] = \frac{\overbrace{10 \cdot e^{2-x}}^{>0}}{\underbrace{(1 + e^{2-x})^2}_{>0}} > 0$$

Somit ist der Graph der Funktion $g(x)$ in \mathbb{R} streng monoton steigend.

3 1.6.2 Zeigen Sie die Richtigkeit der Gleichung: $g'(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [(10 - g(x))]$

$$g(x) = \frac{10}{1 + e^{2-x}}$$

$$g'(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} \cdot (-1)}{(1 + e^{2-x})^2} = \frac{10 \cdot e^{2-x}}{(1 + e^{2-x})^2} = \frac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [(10 - g(x))] \quad (\text{Umformung siehe 1.6.1})$$

9 1.6.3 Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_g sowie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen G_g , die durch dessen Wendepunkt verläuft.

$$g'(x) = \frac{10 \cdot e^{2-x}}{(1 + e^{2-x})^2}$$

$$g''(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} \cdot (1 + e^{2-x})^2 - 10 \cdot e^{2-x} \cdot 2 \cdot (1 + e^{2-x}) \cdot e^{2-x} \cdot (-1)}{(1 + e^{2-x})^4}$$

$$g''(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} \cdot (1 + e^{2-x}) + 10 \cdot e^{2-x} \cdot 2 \cdot e^{2-x}}{(1 + e^{2-x})^3}$$

$$g''(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} - 10 \cdot (e^{2-x})^2 + 20 \cdot (e^{2-x})^2}{(1 + e^{2-x})^3}$$

$$g''(x) = \frac{-10 \cdot e^{2-x} + 10 \cdot (e^{2-x})^2}{(1 + e^{2-x})^3}$$

$$g''(x) = \frac{10 \cdot e^{2-x} \cdot (e^{2-x} - 1)}{(1 + e^{2-x})^3} = 0$$

$$\Rightarrow e^{2-x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2-x} = 1 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x_w = 2$$

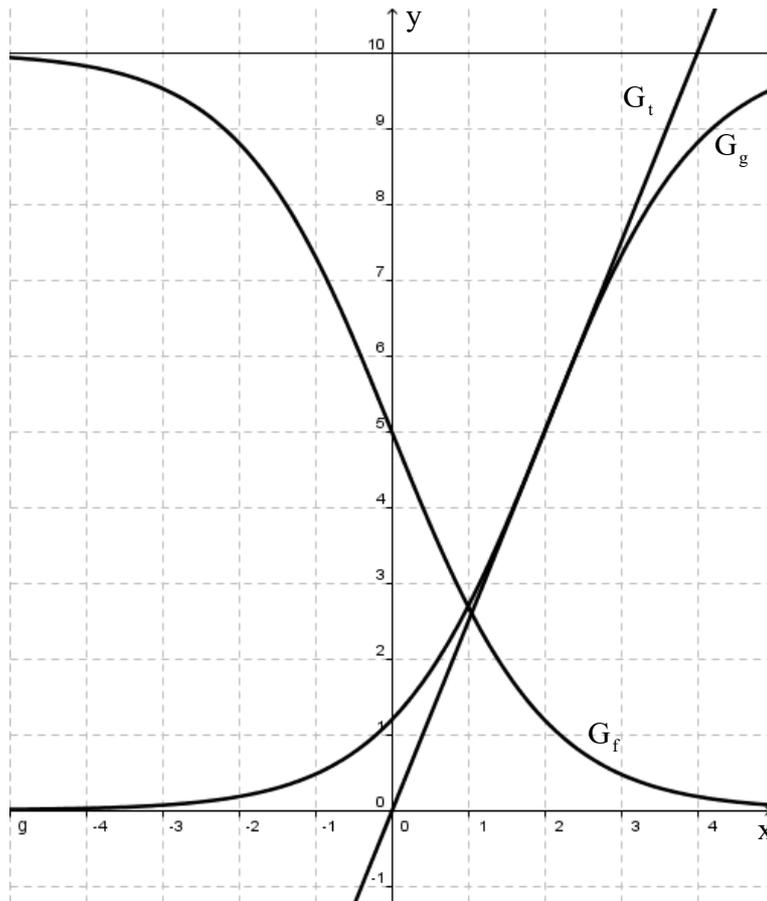
	2	x
$10e^{2-x}$	+	+
$e^{2-x} - 1$	-	+
$(1 + e^{2-x})^3$	+	+
$g''(x)$	-	+
	WP	

$$\left. \begin{aligned} g(2) = 5 &\Rightarrow \text{WP}(2|5) \\ g'(2) = \frac{10}{4} = 2,5 = m_w & \end{aligned} \right\} \text{ in } y = mx + t_0 \text{ einsetzen}$$

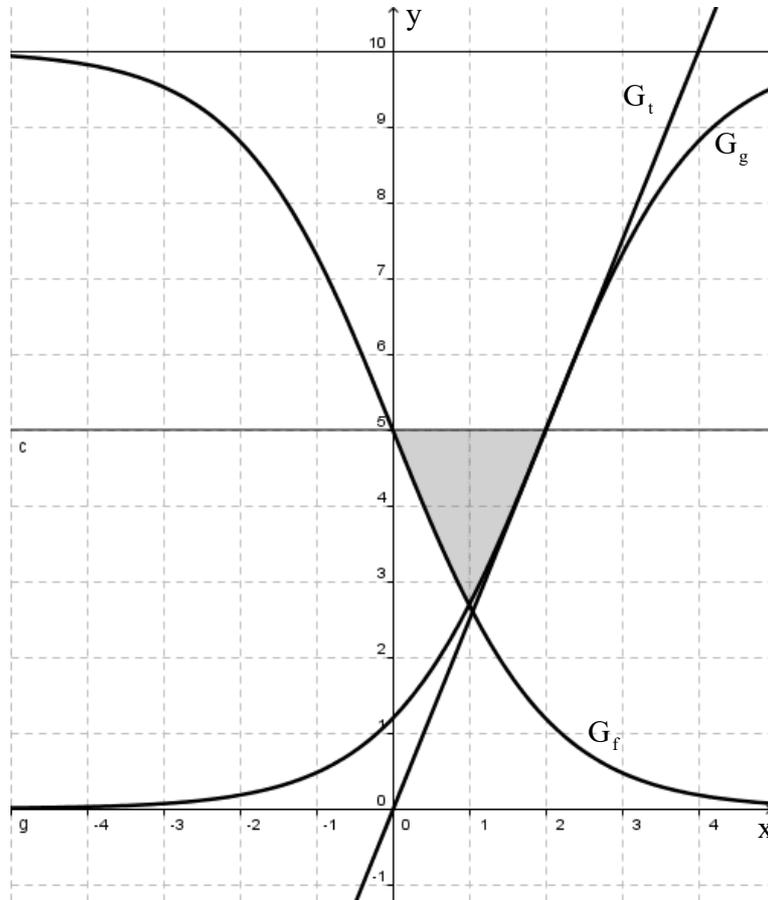
$$5 = 2 \cdot 2,5 + t_0 \Rightarrow t_0 = 0$$

Wen det angente $t : y = 2,5x$

- 4 1.6.4 Zeichnen Sie für $-4 \leq x \leq 4$ den Graphen G_g und die Tangente t in das Koordinatensystem der Aufgabe 1.4.



- 4 1.8 Die Graphen G_f und G_g schließen zusammen mit der Geraden $y = 5$ ein Flächenstück ein. Schraffieren Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus der Aufgabe 1.5.1 seine Flächenmaßzahl auf eine Nachkommastelle gerundet.

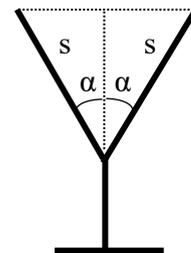


$$A = 2 \cdot \int_0^1 (5 - f(x)) dx = 2 \cdot [5x - F(x)]_0^1 = 2 \cdot [5x - (10 \cdot x - 10 \cdot \ln(1 + e^x))]_0^1$$

$$A = 2 \cdot [10 \cdot \ln(1 + e) - 5x]_0^1 = 2 \cdot [10 \cdot \ln(1 + e) - 5 - 10 \cdot \ln(2)]$$

$$A = 20 \cdot \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - 10 \approx 2,40$$

- 2.0 Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze). Das vorgegebene Innenmaß der Mantellinie wird mit s und der „halbe“ Öffnungswinkel mit α bezeichnet. Für α gilt $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.



- 3 2.1 Stellen Sie die Volumenmaßzahl $V(\alpha)$ des Kelchs in Abhängigkeit von α dar.

Mit $\sin \alpha = \frac{r}{s} \Rightarrow r = s \cdot \sin \alpha$ und $\cos \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s \cdot \cos \alpha$ folgt:

$$V = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot s^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot s \cdot \cos \alpha = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\text{mit } \text{ID}_V =]0^\circ; 90^\circ[$$

- 10 2.2 Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung den Winkel α so, dass der Kelch das größtmögliche Volumen besitzt.

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cdot (-\sin \alpha))$$

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot (2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha)$$

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin \alpha (2 \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin \alpha (2 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha)$$

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin \alpha (2 - 3 \sin^2 \alpha) = 0$$

$$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0^\circ \notin \text{ID}_V \text{ oder } \alpha_2 = 180^\circ \notin \text{ID}_V$$

$$2 - 3 \sin^2 \alpha = 0 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \alpha = +\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54,74^\circ$$

Bemerkung: $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ führt auf negative Winkel!

	0°	$\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$	90°	α
$\frac{\pi}{3} \cdot s^3$	+	+	+	
$2 - 3 \sin^2 \alpha$	+	-	-	
$\sin \alpha$	+	+	+	
$\frac{dV}{d\alpha}$	+	-	-	

HP

Der Kelch hat sein größtmögliches Volumen für $\alpha_{\max} = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54,74^\circ$

Nicht mehr verlangt:

$$V_{\max} = V\left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot \sin^2\left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cdot \cos\left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 0,40 \cdot s^3$$