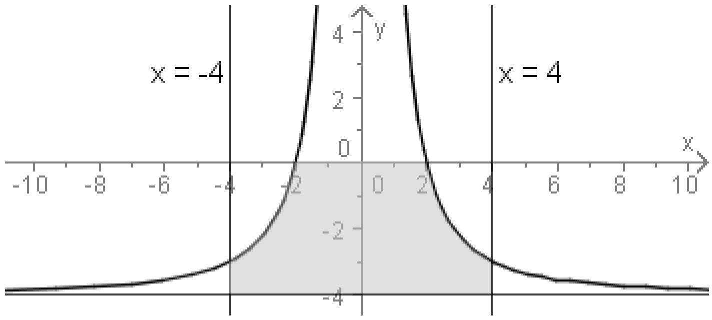
2007 A I Angabe

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{-0{,}25x^2 + k}$ mit $k \in \mathbb{R}$ in der maximalen, von k abhängigen Definitionsmenge $D_{f_k} \subseteq \mathbb{R}$.
5	1.1	Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die maximale Definitionsmenge D_{f_k}.
2	1.2	Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Graphen von f_k.
5	1.3	Untersuchen Sie für $k = 1$ das Verhalten der Funktionswerte $f_1(x)$ in der Nähe der Definitionslücken und zeichnen Sie den Graphen von f_1 für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem (Maßstab: 1 LE = 1 cm).
6	1.4	Zeigen Sie, dass für $k \neq 1$ alle Graphen der Funktionen f_k die gleichen Nullstellen und die gleiche Asymptote für $\lvert x \rvert \to \infty$ besitzen.
7	1.5	In dieser Teilaufgabe wird für $k = 0$ die Funktion f_0 betrachtet, deren Graph mit seinen Asymptoten nebenan dargestellt ist. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des grau markierten Flächenstücks.



	1.6.0	In den folgenden Teilaufgaben wird für $k = -1$ die zughörige Funktion f_{-1} betrachtet.
10	1.6.1	Bestimmen Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes sowie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f_{-1}. [Teilergebnis: $f_{-1}'(x) = -4x \cdot (-0{,}25x^2 - 1)^{-2}$]
5	1.6.2	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_{-1} und seine Asymptote für $-6 \le x \le 6$ in ein neues kartesisches Koordinatensystem (Maßstab: 1 LE = 1 cm). Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse.
4	1.6.3	Zeigen Sie, dass sich die Tangenten in den Nullstellen des Graphen von f_{-1} auf der y-Achse schneiden und geben Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts an.

1.7.0 Gegeben ist zusätzlich die Funktion $g: x \mapsto a \cdot \sin(bx + c)$
mit den reellen Parametern a, b und c und der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

8 1.7.1 Bestimmen Sie Werte für die Parameter a, b und c so, dass der Graph von g den Tiefpunkt $T(0; -4)$ aufweist und die Periodenlänge 8 besitzt, wobei a und b negativ gewählt werden sollen. Begründen Sie Ihr Vorgehen.
Zeichnen Sie den Graphen von g für $-6 \le x \le 6$ in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.6.2.
[Mögliches Teilergebnis: $g(x) = -4 \cdot \sin(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2})$]

8 1.7.2 Begründen Sie, dass sich die Graphen von f_{-1} und g im Intervall $[6; 8]$ schneiden.
Berechnen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 7$, mit dem Newtonverfahren einen Näherungswert für die Abszisse dieses Schnittpunkts. Führen Sie einen Näherungsschritt durch und geben Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle gerundet an.

2.0 Eine Rakete kann im schwerefreien Raum durch das Rückstoßprinzip beschleunigt werden. Dabei strömen während der Brenndauer Verbrennungsgase relativ zur Rakete nach hinten; dadurch erfährt die Rakete eine konstante, nach vorwärts gerichtete Schubkraft mit dem Betrag F_S.
Die Brenndauer wird durch das Zeitintervall $[0;\ t_E]$ beschrieben.
Für die gesamte Masse m(t) der Rakete gilt dabei in guter Nährung :

$$m(t) = m_0 - \mu \cdot t, \quad t \in [0;\ t_E].$$

Dabei ist m_0 die Masse der Rakete vor dem Start des Brennvorgangs; die Größe μ gibt an, welche Treibstoffmasse pro Zeiteinheit ausströmt.
Es gilt $F_S = 1{,}6 \cdot 10^6\ \text{N}$, $\mu = 243\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, $m_0 = 9{,}0 \cdot 10^4\ \text{kg}$ und $t_E = 150\ \text{s}$.
Bei den Berechnungen kann auf die Verwendung der Einheiten verzichtet werden.

3 2.1 Berechnen Sie, ausgehend vom Kraftgesetz $F_S = m(t) \cdot a(t)$, die Beschleunigung der Rakete a(t) zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = t_E$.

7 2.2 Berechnen Sie den Geschwindigkeitszuwachs, den die Rakete im Zeitintervall $[0;\ t_E]$ erfährt.
Geben Sie diesen Geschwindigkeitszuwachs im gegebenen Sachzusammenhang in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

70