2007 A II Lösung

BE 1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

4 1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f sowie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $|x| \to \infty$.

$f(-x) = \ln\left((-x)^2 + 1\right) = \ln\left(x^2 + 1\right) = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(x^2 + 1\right) \to \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to \infty$ (wegen Symmetrie!)

3 1.2 Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und geben Sie ihre Wertemenge W_f an.

$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ (2x)$

$W_f = [0;\infty[$

5 1.3 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und geben Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f an.

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

x		0	
$2x$	$-$		$+$
x^2+1	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$
G_f	↘	TP	↗

G_f ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty;0]$

G_f ist streng monoton steigend für $x \in [0;\infty[$

$f(0) = 0 \Rightarrow TP(0|0)$

6 1.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und geben Sie die Koordinaten seiner Wendepunkte an.

[Teilergebnis: $f''(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$]

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow\quad 2-2x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=1 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\pm 1$$

x		-1		1	
$2-2x^2$	$-$		$+$		$-$
$(x^2+1)^2$	$+$		$+$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$
G_f	rk	WP	lk	WP	rk

G_f ist rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty;-1]$ und für $x \in [1;\infty[$

G_f ist linksgekrümmt für $x \in [-1;1]$

$f(\pm 1) = \ln(2) \quad\Rightarrow\quad WP_1(-1\,|\,\ln(2)) \qquad WP_2(1\,|\,\ln(2))$

5 1.5 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte der Ableitungsfunktion f' für $|x| \to \infty$ und geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f' an.

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{2x}^{\to\infty}}{\underbrace{x^2+1}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{2x}^{\to-\infty}}{\underbrace{x^2+1}_{\to\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Die Extremstellen des Graphen von f' sind die Wendestellen des Graphen von f. Somit folgt für die Extrempunkte:

$f'(-1) = \dfrac{2\cdot(-1)}{(-1)^2+1} = -1 \quad\Rightarrow\quad TP(-1\,|\,-1)$ VZW von „-„ auf „+“ (siehe VZT 1.4)

$f'(1) = \dfrac{2\cdot 1}{1^2+1} = 1 \quad\Rightarrow\quad HP(1\,|\,1)$ VZW von „+„ auf „-“ (siehe VZT 1.4)

8 1.6 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f' und geben Sie die Koordinaten seiner Wendepunkte an.

Das Krümmungsverhalten von f' wird durch f''' angegeben.

$$f'''(x)=\frac{\left(x^2+1\right)^2\cdot(-4x)-\left(2-2x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-4x^3-4x-8x+8x^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{4x^3-12x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{4x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0$$

$x_1=0$; $x^2-3=0 \;\Rightarrow\; x_{2/3}=\pm\sqrt{3}$

		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		x
$4x$	$-$		$-$		$+$		$+$	
x^2-3	$+$		$-$		$-$		$+$	
$\left(x^2+1\right)^3$	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
$G_{f'}$	rk		lk		rk		lk	
		WP		WP		WP		

Für die Wendepunkte des Graphen von f' folgt somit:

$f'\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad WP_1\left(-\sqrt{3}\,|\,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$f'(0)=0$ $\quad WP_2(0\,|\,0)$

$f'\left(\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad WP_3\left(\sqrt{3}\,|\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

6 1.8 Die Graphen von f und f' schneiden sich an den Stellen x_1 und x_2, wobei $x_1 < x_2$. Bestimmen Sie x_2 mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Verwenden Sie als Startwert $x_0=1{,}3$ und führen Sie einen Näherungsschritt durch. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

$$f(x)=f'(x)$$

$$\ln\left(x^2+1\right)=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\underbrace{\ln\left(x^2+1\right)-\frac{2x}{x^2+1}}_{h(x)}=0$$

$$h(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\frac{2x}{x^2+1}=0$$

$$h'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Startwert: $x_0=1{,}3$

$h(1,3) = 0,023$

$h'(1,3) = 1,157$

Es gilt: $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$

Somit folgt für $x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 1,3 - \frac{0,023}{1,157} = 1,280$

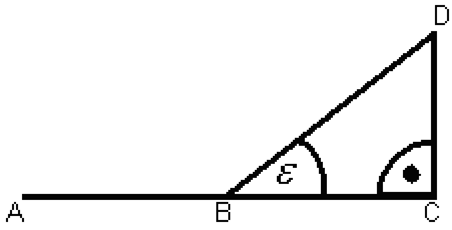
4 1.9 Berechnen Sie $\int_0^a f'(x)dx$ für eine positive reelle Zahl a, prüfen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{a \to \infty} \int_0^a f'(x)dx$ existiert und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

$$\int_0^a f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^a = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^a = \ln\left(a^2+1\right) - \ln(1) = \ln\left(a^2+1\right)$$

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a f'(x)dx = \lim_{a \to \infty} \ln\left(a^2+1\right) \to \infty \quad (\text{vgl. } 1.1)$$

Die Fläche, welche der Graph der Funktion f' mit der x-Achse rechts vom Ursprung einschließt hat unendlichen Flächeninhalt.

2.0 Eine geradlinige Straße führt von einem Punkt A zu einem Punkt C. Vom Punkt C aus erreicht man auf kürzestem, aber unbefestigtem Weg eine Waldhütte im Punkt D.
Für die Entfernungen gelten $\ell = \overline{AC}$ und $s = \overline{CD}$.



$s = \overline{CD}$

$\ell = \overline{AC}$

Ein Wanderer möchte in möglichst kurzer Zeit von A nach D gelangen. Zunächst wandert er ein Stück auf der Straße mit der konstanten Geschwindigkeit v_1. An einer Stelle B verlässt er dann die Straße und geht von dort auf geradlinigem Weg unter dem Winkel ε zur ursprünglichen Wegrichtung quer durchs Gelände nach D, und zwar mit der konstanten Geschwindigkeit v_2. (Siehe Skizze)

5 2.1 Zeigen Sie, dass für die von der Stelle B und dem zugehörigen Winkel ε abhängige Gesamtzeit $T(\varepsilon)$, die man für diesen Weg von A über B nach D benötigt, gilt:

$$T(\varepsilon) = \frac{\ell}{v_1} - \frac{s \cdot \cos\varepsilon}{v_1 \cdot \sin\varepsilon} + \frac{s}{v_2 \cdot \sin\varepsilon}$$

Es gilt: $T(\varepsilon) = t_{AB} + t_{BD} = \frac{\overline{AB}}{v_1} + \frac{\overline{BD}}{v_2}$

Außerdem gilt:

$$\sin(\varepsilon) = \frac{s}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{s}{\sin(\varepsilon)}$$

$$\tan(\varepsilon) = \frac{s}{\ell - \overline{AB}} \Rightarrow \ell - \overline{AB} = \frac{s}{\tan(\varepsilon)} \Rightarrow \overline{AB} = \ell - \frac{s \cdot \cos(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)}$$

Beides nun eingesetzt:

$$T(\varepsilon) = \frac{\overline{AB}}{v_1} + \frac{\overline{BD}}{v_2} = \frac{\ell}{v_1} - \frac{s \cdot \cos(\varepsilon)}{v_1 \cdot \sin(\varepsilon)} + \frac{s}{v_2 \cdot \sin(\varepsilon)}$$

2.2 Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion von $T(\varepsilon)$ gilt:

$$\frac{dT}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{s}{v_1 \cdot v_2} \cdot \frac{v_2 - v_1 \cdot \cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2}$$

2.3.0 Die vorliegenden Wegstrecken bzw. Geschwindigkeiten betragen

$\ell = 7{,}1$ km, $s = 4{,}1$ km, $v_1 = 5{,}0 \frac{km}{h}$ und $v_2 = 2{,}5 \frac{km}{h}$.

2.3.1 Berechnen Sie jeweils, wie lange die Wanderung von A nach D dauern würde, wenn der Wanderer die Straße schon im Punkt A bzw. erst im Punkt C verlassen würde.

2.3.2 Bestimmen Sie zunächst, für welchen Winkel ε_0 die Zeit $T(\varepsilon)$ ihren absolut kleinsten

Wert annimmt, und berechnen Sie dann $T(\varepsilon_0)$.