2006 I

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto x \cdot (2 - \ln x)^2$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f = \left]0;\infty\right[$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Erläutern Sie, dass f eine in D_f stetige Funktion ist und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen G_f bei Annäherung an die Ränder der Definitionsmenge.

Die Funktionen $u(x) = x$, $v(x) = 2$ und $w(x) = \ln(x)$ sind in $\left]0;\infty\right[$ stetig. Die Differenz $v(x) - w(x) = 2 - \ln(x)$ stetiger Funktion ist ebenfalls stetig. Und ebenso ist das Produkt $u(x) \cdot (v(x) - w(x))^2 = x \cdot (2 - \ln(x))^2$ stetiger Funktionen ebenfalls stetig in $\left]0;\infty\right[$. Also ist auch die Funktion $f(x)$ in $\left]0;\infty\right[$ stetig.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \overbrace{x}^{\to 0} \cdot \overbrace{(2 - \ln(x))^2}^{\to \infty} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(2 - \ln(x))^2}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2(2 - \ln(x)) \cdot (-\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\overbrace{2(2 - \ln(x))}^{\to \infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-2 \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (2x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \overbrace{x}^{\to \infty} \cdot \overbrace{(2 - \ln(x))^2}^{\to \infty} \to \infty$$

1.2 Untersuchen Sie, wie sich die Steigung von f bei rechtsseitiger Annäherung an die Stelle x = 0 verhält.

$$f(x) = x \cdot (2 - \ln x)^2$$

$$f'(x) = (2 - \ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot (2 - \ln(x)) \cdot (-\tfrac{1}{x}) = (2 - \ln(x))(2 - \ln(x) - 2) = -\ln(x) \cdot (2 - \ln(x)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = -\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \overbrace{\ln(x)}^{\to -\infty} \cdot \overbrace{(2 - \ln(x))}^{\to +\infty} \to \infty$$

1.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f.

$$f'(x) = -\ln(x) \cdot (2 - \ln(x)) = 0$$

$$\ln(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$2 - \ln(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad x = e^2$$

$$f''(x) = -\tfrac{1}{x} \cdot (2 - \ln(x)) - \ln(x) \cdot (-\tfrac{1}{x}) = -\tfrac{1}{x}(2 - \ln(x) - \ln(x)) = -\tfrac{2}{x}(1 - \ln(x)) = \tfrac{2}{x}(\ln(x) - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad G_f \text{ ist rechtsgekrümmt} \\ f(1) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow HP(1|4)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''\left(e^2\right) = \frac{2}{e^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad G_f \text{ ist linksgekrümmt} \\ f\left(e^2\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow TP\left(e^2 \mid 0\right)$$

1.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_f, geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts an und zeigen Sie, dass -1 der kleinste Steigungswert der Funktion f ist.

$$f''(x) = \tfrac{2}{x}\left(\ln(x) - 1\right) = 0$$
$$\ln(x) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_W = e$$

Vorzeichentabelle:

	0	e
$\frac{2}{x}$	+	+
$\ln(x)-1$	-	+
$f''(x)$	-	+
G_f	rk	lk

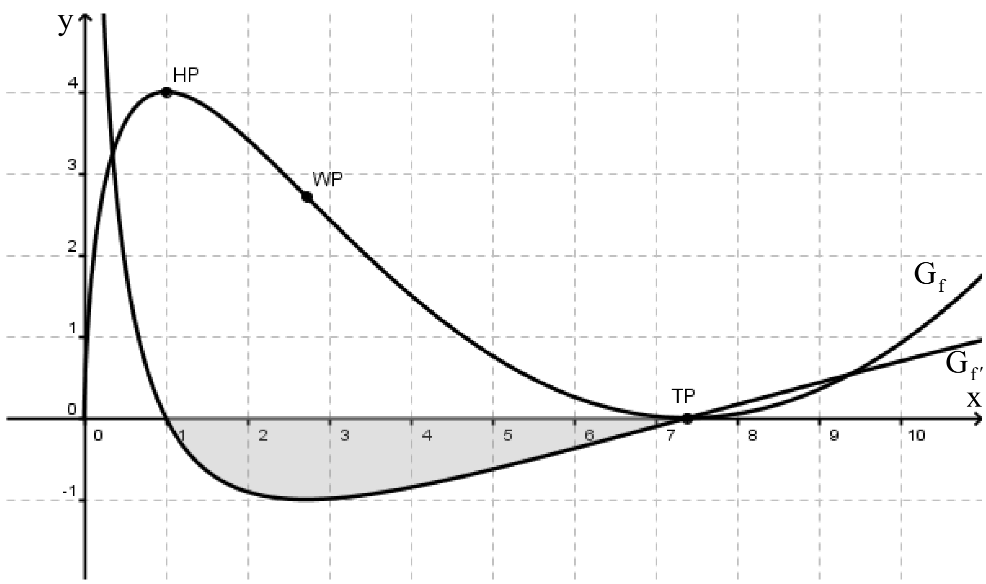
G_f ist rechtsgekrümmt für $x \in]0; e]$ und linkgekrümmt für $x \in [e; \infty[$

$f(e) = e$

Somit hat G_f einen Wendepunkt $WP(e|e)$

Da f'' an der Stelle $x_W = e$ einen Vorzeichenwechsel von „-" nach „+" hat muss f' an dieser Stelle einen relativen Tiefpunkt haben. Somit hat G_f den kleinsten Steigungswert an der Stelle $x_W = e$. Die kleinste Steigung ist $f'(e) = -1$.

1.5 Zeichnen Sie unter Verwendung schon bekannter Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graph G_f und den Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' für $0 < x \leq 10$ in ein gemeinsames kartesisches Koordinatensystem.



1.6 Die Graphen G_f und $G_{f'}$ schneiden sich an den drei Stellen x_1, $x_2 = e^2$ und x_3, wobei $x_1 < x_3$. Berechnen Sie die Schnittstelle x_1 mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Verwenden Sie dabei als Startwert $x_0 = 0{,}5$ und führen Sie zwei Näherungsberechnungen durch. Geben Sie die für die Berechnung notwendigen Teilergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Ansatz $f(x) = f'(x)$ nach weiterer Vereinfachung auf die Gleichung $2x - x \cdot \ln x + \ln x = 0$ führt.]

$$f(x) = f'(x)$$

$$x\left(2-\ln(x)\right)^2 = -\ln(x)\left(2-\ln(x)\right)$$

$$x\left(2-\ln(x)\right)^2 + \ln(x)\left(2-\ln(x)\right) = 0$$

$$\left(2-\ln(x)\right)\left(x\left(2-\ln(x)\right)+\ln(x)\right) = 0$$

$$\left(2-\ln(x)\right)\left(2x - x\ln(x)+\ln(x)\right) = 0$$

Nun gilt:

$$2-\ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = 2$$

$$x_2 = e^2$$

und außerdem:

$$h(x) = 2x - x\ln(x) + \ln(x) = 0$$

$$h'(x) = 2 - \left(x\cdot\tfrac{1}{x} + \ln(x)\right) + \tfrac{1}{x} = 1 - \ln(x) + \tfrac{1}{x}$$

Beim Newton-Verfahren gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

Tabelle:

i	x_i	$h(x_i)$	$h'(x_i)$
0	0,5	0,653	3,693
1	0,323	-0,119	5,226
2	0,346		

Bemerkung: Sämtliche Ergebnisse wurden auf drei Nachkommastellen gerundet;, es wurde mit den gerundeten Werten weitergerechnet.

1.7 Kennzeichnen Sie das Flächenstück, das der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' zwischen seinen beiden Nullstellen mit der x – Achse einschließt und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

$$A = -\int_1^{e^2} f'(x)\,dx = -\left[x\cdot\left(2-\ln x\right)^2\right]_1^{e^2} = -\left[e^2\cdot\left(2-\ln\left(e^2\right)^2\right) - 1\cdot\left(2-\ln(1)\right)^2\right] = 4$$

1.8 Begründen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{a \to 0} \int\limits_a^1 f'(x)dx$ existiert, und geben Sie seinen Wert an.

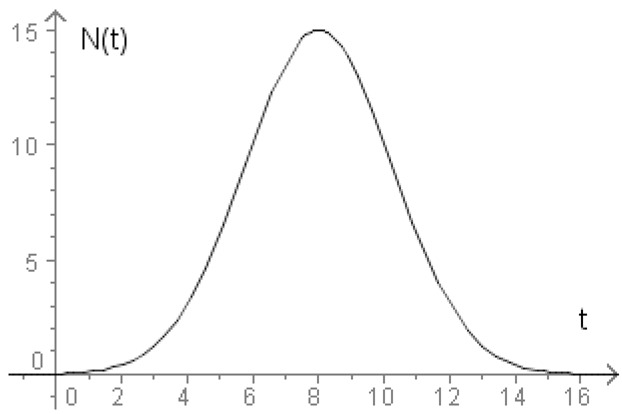
$$\lim_{a\to0}\int_a^1 f'(x)dx = \lim_{a\to0}\left[f(x)\right]_a^1 = \lim_{a\to0}\left(f(1)-f(a)\right) = f(1)-\lim_{a\to0}\left(f(a)\right) = 4-\lim_{a\to0}\left(f(a)\right)$$

Da $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ ist $\lim\limits_{a\to0}\left(f(a)\right) = 0$ und somit folgt:

$$\lim_{a\to0}\int_a^1 f'(x)dx = 4-\lim_{a\to0}\left(f(a)\right) = 4$$

2.0 Nebenstehendes Diagramm entspricht näherungsweise dem Verlauf einer lokal beschränkten Epidemie innerhalb einer Bevölkerung. Für die zeitliche Abhängigkeit der Anzahl der Erkrankten in Tausend gilt ohne Berücksichtigung der Einheiten die Gleichung

$N(t) = 15 \cdot e^{-0{,}1\cdot(t-8)^2}$,



wobei t als Zeitangabe in Wochen zu interpretieren ist.
Zunächst sind nur wenige Personen von der Krankheit betroffen, jedoch breitet sie sich wegen der hohen Ansteckungsgefahr schnell in der Bevölkerung aus. Wegen der anlaufenden Impfaktion und der Personen, die die Krankheit überstanden haben, steigt der Bevölkerungsanteil der gegen die Krankheit immunen Menschen. Dadurch sinkt der Anstieg der Neuerkrankungen und die Epidemie klingt ab.

2.1 Berechnen Sie die Zeitspanne, in der sich die Anzahl der Krankheitsfälle bezogen auf das Ende der 1. Woche auf den dreifachen Wert vergrößert.

$$N(1) = 15\cdot e^{-0{,}1\cdot(1-8)^2} = 15\cdot e^{-4{,}9}$$

$$N(t) = 3\cdot N(1)$$

$$15\cdot e^{-0{,}1\cdot(t-8)^2} = 3\cdot 15\cdot e^{-4{,}9}$$

$$e^{-0{,}1\cdot(t-8)^2} = 3\cdot e^{-4{,}9}$$

$$-0{,}1\cdot(t-8)^2 = \ln\left(3\cdot e^{-4{,}9}\right)$$

$$(t-8)^2 = \frac{\ln\left(3\cdot e^{-4{,}9}\right)}{-0{,}1}$$

$$t_{1/2} = 8 \pm \sqrt{\frac{\ln(3)-4{,}9}{-0{,}1}} = \begin{cases} 14{,}2 \\ 1{,}8 \end{cases}$$

$$\Delta t = t_1 - 1 = 1{,}8 - 1 = 0{,}8$$

2.2 Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, in dem die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Krankheit am stärksten ist. Geben Sie auch die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag für diesen Zeitpunkt an.

$$N(t)=15\cdot e^{-0,1\cdot(t-8)^2}=15\cdot e^{-0,1\cdot\left(t^2-16t+64\right)}=15\cdot e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit gibt die 1. Ableitung der Funktion $N(t)$ an:

$$\dot{N}(t)=15\cdot(-0,2t+1,6)\cdot e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}=(-3t+24)\cdot e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist maximal, wenn $\dot{N}(t)$ ein rel. Maximum hat:

$$\ddot{N}(t)=-3\cdot e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}+(-3t+24)\cdot(-0,2t+1,6)\cdot e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}$$

$$\ddot{N}(t)=\left(-3+0,6t^2-4,8t-4,8t+38,4\right)\cdot e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}$$

$$\ddot{N}(t)=\left(0,6t^2-9,6t+35,4\right)\cdot e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}=0$$

$$t_{1/2}=\frac{9,6\pm\sqrt{9,6^2-4\cdot0,6\cdot35,4}}{2\cdot0,6}=\frac{9,6\pm\sqrt{7,2}}{2\cdot0,6}=\begin{cases}10,24\\5,76\end{cases}$$

	5,76	10,24	
$0,6t^2-9,6t+35,4$	+	–	+
$e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}$	+	+	+
Vorz. von $\ddot{N}(t)$	+	–	+
Monotonie v. $\dot{N}(t)$	↗	↘	↗
	HP	TP	

Für $t_1=5,76$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit maximal.

2.3 Ermitteln Sie durch Rechnung den Hochpunkt der Funktion N und interpretieren Sie die Koordinaten des Hochpunkts im Sinne der Aufgabenstellung.

$$\dot{N}(t)=(-3t+24)\cdot e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}=0\ \Rightarrow\ -3t+24=0\ \Rightarrow\ t_E=6$$

	6	
$-3t+24$	+	–
$e^{-0,1t^2+1,6t-6,4}$	+	+
Vorz. V. $\dot{N}(t)$	+	–
Monotonie v. $N(t)$	↗	↘
	HP	

$$N(6)=15\cdot e^{-0,1\cdot(6-8)^2}=15\cdot e^{-0,4}\approx10,05\ \Rightarrow\ HP\left(6\middle|15\cdot e^{-0,4}\right)$$

2.4 Die Epidemie gilt als überstanden, wenn wieder der Krankenstand wie zur Zeit $t = 0$ erreicht ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.

$$N(t) = N(0)$$

$$15 \cdot e^{-0{,}1\cdot(t-8)^2} = 15 \cdot e^{-6{,}4}$$

$$-0{,}1 \cdot (t-8)^2 = -6{,}4$$

$$(t-8)^2 = 64$$

$$t_{1/2} - 8 = \pm 8$$

$$t_{1/2} = 8 \pm 8 = \begin{cases} 16 \\ 0 \end{cases}$$

Nach 16 Wochen ist die Epidemie überstanden.