2004

Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{k}{x}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$ in der maximalen, von k unabhängigen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
6	1.1	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_k(x)$ für $x \to 0$ und für $\lvert x \rvert \to \infty$ in Abhängigkeit von k.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{k}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\tfrac{1}{2}x^2}_{=0} + \lim_{x \overset{<}{\to} 0}\tfrac{k}{x} \to \begin{cases} \infty & k < 0 \\ -\infty & k > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{k}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\tfrac{1}{2}x^2}_{=0} + \lim_{x \overset{<}{\to} 0}\tfrac{k}{x} \to \begin{cases} -\infty & k < 0 \\ \infty & k > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{k}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x \to -\infty}\tfrac{1}{2}x^2}_{\to\infty} + \underbrace{\lim_{x \to -\infty}\tfrac{k}{x}}_{=0} \to \infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{k}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x \to \infty}\tfrac{1}{2}x^2}_{\to\infty} + \underbrace{\lim_{x \to \infty}\tfrac{k}{x}}_{=0} \to \infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

6	1.2	Zeigen Sie, dass der Graph jeder Funktion f_k genau einen Extremalpunkt besitzt und die Art dieses Extremalpunktes von k unabhängig ist.

$$f_k(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{k}{x}$$

$$f_k'(x) = x - \tfrac{k}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{k}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^3 = k \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt[3]{k}$$

Da es nur eine Lösung gibt hat der Graph der Funktion f_k nur eine Stelle mit waagrechter Tangente.

$$f_k''(x) = 1 + \tfrac{2k}{x^3}$$

Nun folgt: $f_k''(x) = 1 + \frac{2k}{\left(\sqrt[3]{k}\right)^3} = 1 + \frac{2k}{k} = 1 + 2 = 3 > 0 \quad \text{lk} \quad \Rightarrow \quad \text{TP} \quad (\text{unabhängig von k})$

Somit gibt es nur einen Tiefpunkt (und keine weiteren Extremalpunkte).

7 1.3 Zeigen Sie, dass der Graph jeder Funktion f_k genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse besitzt und dieser zugleich der einzige Wendepunkt des Graphen ist.

$f_k(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{k}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}x^2 = -\frac{k}{x} \;\Rightarrow\; x^3 = -2k \;\Rightarrow\; x_N = -\sqrt[3]{2k}$

Also gibt es nur einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

$f_k''(x) = 1 + \frac{2k}{x^3} = 0 \;\Rightarrow\; 1 = -\frac{2k}{x^3} \;\Rightarrow\; x^3 = -2k \;\Rightarrow\; x_W = -\sqrt[3]{2k}$

$f_k'''(x) = -\frac{6k}{x^4} \;\Rightarrow\; f_k'''\left(-\sqrt[3]{2k}\right) = -\frac{6k}{\left(-\sqrt[3]{2k}\right)^4} = \frac{6k}{2k \cdot \sqrt[3]{2k}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2k}} \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{WP}$

Somit ist die einzige Nullstelle des Graphen auch zugleich Wendepunkt $WP\left(-\sqrt[3]{2k}\,|\,0\right)$

1.4.0 Für alle weiteren Teilaufgaben gilt nun k = 1.

3 1.4.1 Ermitteln Sie mit Hilfe der vorliegenden Ergebnisse die Koordinaten des Extremalpunktes und des Wendepunktes des Graphen von f_1.

Für die x-Koordinate des Tiefpunktes gilt: $x_{TP} = 1$

$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f_1(1) = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5 \;\Rightarrow\; TP(1|1{,}5)$

Für die x-Koordinate des Wendepunktes gilt:

$x_{WP} = -\sqrt[3]{2} \;\Rightarrow\; WP\left(-\sqrt[3]{2}\,|\,0\right) \quad \left(WP(-1{,}26|0)\right)$

6 1.4.2 Zeigen Sie an Hand der bisherigen Ergebnisse, dass es genau einen Punkt des Graphen von f_1 gibt, in dem die Tangente an den Funktionsgraphen parallel zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten verläuft.

Zunächst betrachtet man den Bereich $x < 0$:

Da $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}\right) \to \infty$ und $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}\right) \to -\infty$ (nach 1.1) und der Graph der Funktion f_1 keine Extrema besitzt muss ist f_1 für alle $x < 0$ streng monoton fallend sein. Somit hat der Graph in diesem Bereich nur negative Steigungen. Der Graph kann an keiner Stelle die Steigung mit dem Wert $m = 1$ annehmen.

Jetzt betrachtet man den Bereich $0 < x \leq 1$:

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}\right) \to \infty$ und der Graph der Funktion f_1 an der Stelle $x_{TP} = 1$ einen Tiefpunkt hat (mit der Steigung $f_1'(1) = 0$) ist der Graph der für $0 < x \leq 1$ streng monoton fallend. Somit hat der Graph in diesem Bereich nur negative Steigungen. Der Graph kann an keiner Stelle die Steigung mit dem Wert $m = 1$ annehmen.

Jetzt betrachtet man den Bereich $1 \leq x$:

Der Graph der Funktion f_1 hat an der Stelle $x_{TP} = 1$ einen Tiefpunkt, somit ist der Graph dort linksgekrümmt. Da der einzige Wendepunkt des Graphen aber links von der y-Achse liegt ist der Graph der Funktion f_1 im Bereich $1 \leq x$ ständig linksgekrümmt $\left(\text{also ist } f''(x) > 0 \text{ für alle } x \geq 1\right)$. Das heißt aber, dass die Steigung des Graphen der Funktion f_1 streng monoton steigend ist. Da ferner $\lim\limits_{x \to \infty} f_1'(x) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \to \infty$ wird somit jeder positive Steigungswert (und insbesondere $m = 1$) genau einmal angenommen.

5 1.4.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_1 für $-3 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich geeignete Funktionswerte. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

$f_1(-3) = 4{,}17$

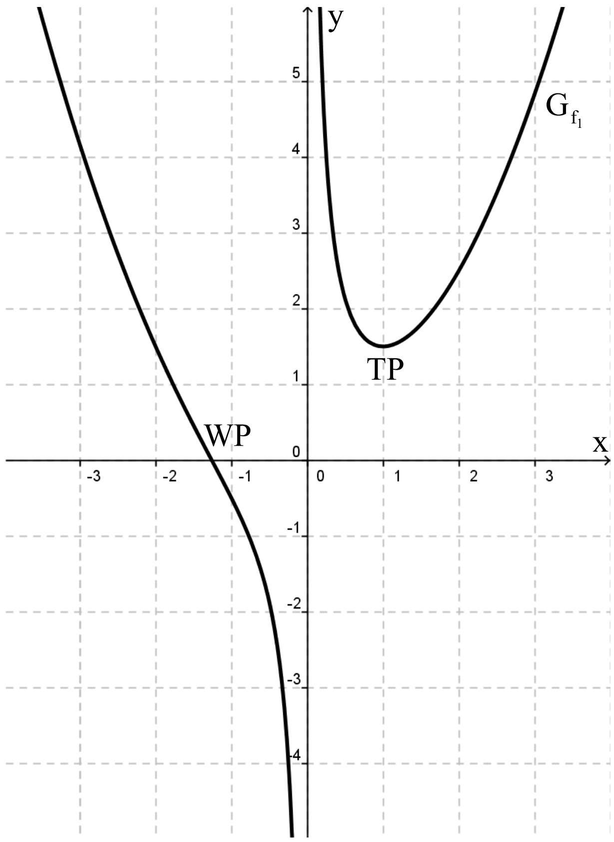
$f_1(-2) = 1{,}5$

$f_1(-0{,}5) = -1{,}88$

$f_1(0{,}5) = 2{,}13$

$f_1(2) = 2{,}5$

$f_1(3) = 4{,}83$



6 1.4.4 Der Graph der Funktion f_1 nähert sich für $|x| \to \infty$ der Parabel P mit der Gleichung $p(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Zeichnen Sie die Parabel P für $-3 \le x \le 3$ in das Schaubild von Teilaufgabe 1.4.3 ein und berechnen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktionswerte $f_1(x)$ und $p(x)$ um weniger als 0,05 voneinander abweichen.

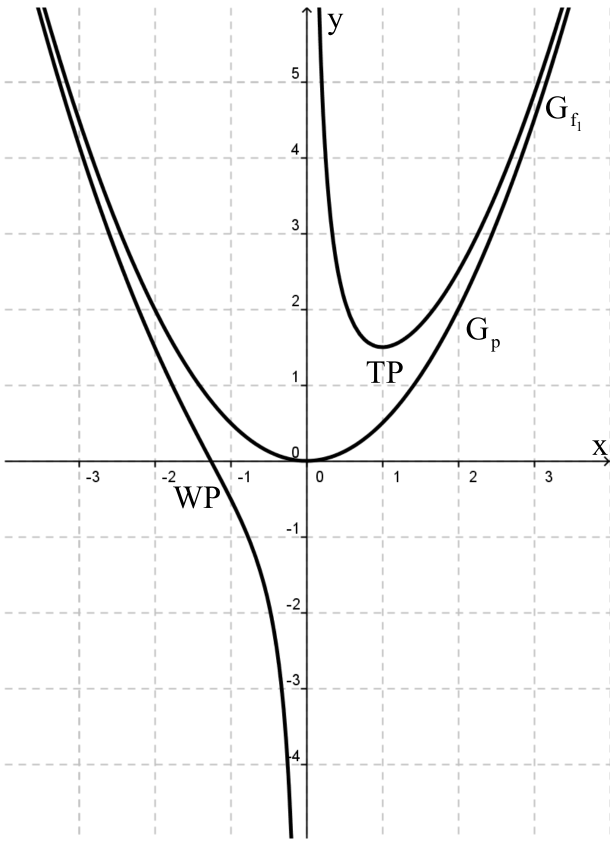
$$\left|f_1(x) - p(x)\right| < 0{,}05$$

$$\left|\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2}x^2\right| < 0{,}05$$

$$\left|\tfrac{1}{x}\right| < 0{,}05$$

$$|x| > 20$$

Somit $x > 20$ oder $x < -20$



1.5.0 Die Funktion F ist diejenige Stammfunktion der Funktion f_1 für x>0, bei deren Graph G_F der Wendepunkt auf der x-Achse liegt.

5 1.5.1 Bestimmen Sie mit Hilfe bereits vorliegender Ergebnisse das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion F.

Da $F'(x) = f_1(x)$ und $F''(x) = f_1'(x)$, lässt sich aus dem Monotonieverhalten von f_1 auf das Krümmungsverhalten von F schließen. Dazu verwendet man nun den Graphen in 1.4.3

Für $x < 0$ ist f_1 streng monoton fallend, somit ist G_F für alle $x \in]-\infty; 0[$ rechtsgekrümmt.

Für $0 < x \le 1$ ist f_1 streng monoton fallend, somit ist G_F für alle $x \in]0; 1]$ rechtsgekrümmt.

Für $x \ge 1$ ist f_1 streng monoton steigend, somit ist G_F für alle $x \in [1; \infty[$ linksgekrümmt.

5 1.5.2 Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion F.

Die Wendestelle des Graphen der Funktion F entspricht der Extremstelle des Graphen der Funktion f_1. Da der Wendepunkt noch zusätzlich auf der x-Achse liegen soll gilt somit für die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen der Funktion F: $W(1|0)$

Da man die Stammfunktion von f_1 so bilden soll, dass der Graph der Funktion F den Wendepunkt $W(1|0)$ enthält bildet man für $x>0$ die Menge der Stammfunktionen von f_1.

$F(x)=\frac{1}{6}x^3+\ln(x)+C$

Nun muss gelten:

$$F(1)=0$$
$$\tfrac{1}{6}+\ln(1)+C=0$$
$$C=-\tfrac{1}{6}$$

Also erhält man: $F(x)=\frac{1}{6}x^3+\ln(x)-\frac{1}{6}$

2.0 Gegeben ist nun die reelle Funktion $g\colon x \mapsto e^{4-x}-1$ mit der Definitionsmenge $D_g=\mathbb{R}$.

8 2.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte g(x) für $|x|\to\infty$, berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion g mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion g.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{4-x}-1\right)=\underbrace{\lim_{x\to-\infty} e^{4-x}}_{\to\infty}-\lim_{x\to-\infty} 1\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^{4-x}-1\right)=\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{4-x}}_{=0}-\lim_{x\to\infty} 1=-1$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $g(0)=e^4-1 \;\Rightarrow\; S_y\left(0|e^4-1\right)$

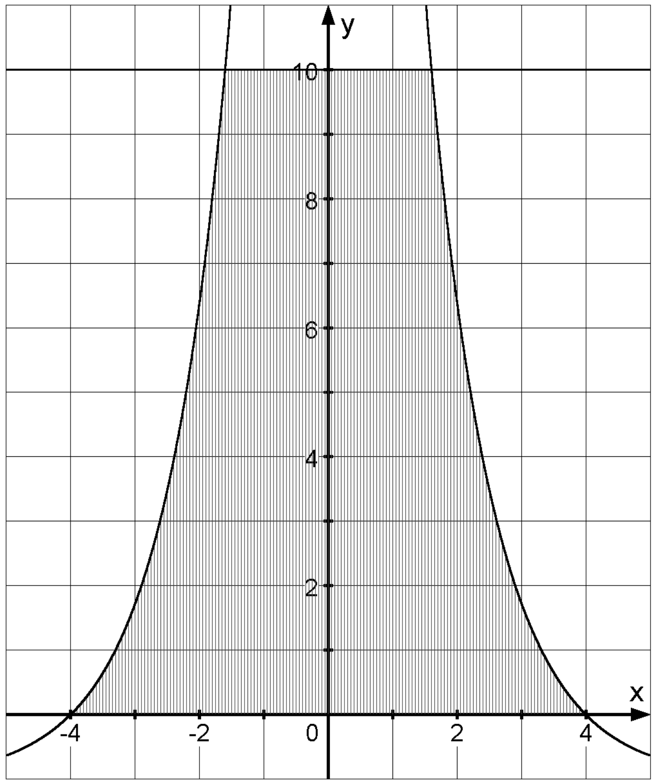
Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$g(x)=0$$
$$e^{4-x}-1=0$$
$$e^{4-x}=1 \quad |\ln(...)$$
$$4-x=0$$
$$x=4$$
$$\Rightarrow\; S_x(4|0)$$

$g'(x)=-e^{4-x}<0$ für alle $x\in\mathbb{R}$

Somit ist die Funktion g für alle $x\in\mathbb{R}$ streng monoton abnehmend.

9 2.2 Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt einer Staumauer. Das grau dargestellte Flächenstück ist achsensymmetrisch zur y-Achse und wird unter anderem vom Graphen der Funktion g und der Geraden mit der Gleichung y = 10 begrenzt.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.



Zunächst berechnet man die Schnittstelle des Graphen der Funktion g mit der waagrechten Gerade $y=10$.

$$g(x)=10$$
$$e^{4-x}-1=10$$
$$e^{4-x}=11 \quad |\ln(...)$$
$$4-x=\ln(11)$$
$$x=4-\ln(11)$$

Die gesuchte Fläche setzt sich nun aus zwei (je symmetrischen) Teilflächen zusammen.
A_1 ist die Rechtecksfläche mit der Höhe 10 und der Breite $4-\ln(11)$.

$$A_1=10\cdot(4-\ln(11))=40-10\ln(11)$$

A_2 ist die Fläche, die der Graph der Funktion g mit der x-Achse und den senkrechten Geraden $x=4-\ln(11)$ und $x=4$ einschließt.

$$A_2=\int_{4-\ln(11)}^{4}\left(e^{4-x}-1\right)dx=\left[-e^{4-x}-x\right]_{4-\ln(11)}^{4}=-e^0-4-\left(-e^{4-(4-\ln(11))}-(4-\ln(11))\right)$$
$$=-5-\left(-e^{\ln(11)}-4+\ln(11)\right)=-5-(-11-4+\ln(11))=10-\ln(11)$$
$$A_{Ges}=2\cdot(A_1+A_2)=2\cdot(40-10\ln(11)+10-\ln(11))=100-22\ln(11)\approx 47{,}25$$

66