Musterlösung der Abschlussprüfung 2002 AI (Technik)

1.1 $t = 0:\ f_0(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad D_0 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x_0 = 0$ ist eine stetig behebbare Definitionslücke +

keine Nullstellen

$t \neq 0:\ x_0 = 0$ ist Polstelle +

<u>Nullstellen</u>: $x^2 - tx + t = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4t}}{2}$, $D = t(t-4)$ +

Zeichnung: +

$0 < t < 4$: keine Nullstellen +

$t = 0$: siehe oben

$t = 4$: eine Nullstelle +

$t < 0 \vee t > 4$: zwei Nullstellen +

1.2.1 $f_{-2}(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

Nullstellen: $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ und $x_2 = -1 + \sqrt{3}$ +

Vertikale Asymptote: $x = 0$ +

Waagrechte Asymptote: $f(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \to 1$ für $|x| \to \infty \Rightarrow y = 1$ ++

Art d. Asympt.: +

1.2.2 $f'(x) = \frac{x^2(2x+2) - (x^2 + 2x - 2)2x}{x^4} = \frac{x(2x+2) - (x^2 + 2x - 2)2}{x^3} =$

$= \frac{2x^2 + 2x - 2x^2 - 4x + 4}{x^3} = \frac{-2x + 4}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ++

Dort hat $f'(x)$ einen Vorzeichenwechsel von " + " nach " - "; $f(2) = 1{,}5$

$\Rightarrow$ rel. HP$(2 \mid 1{,}5)$ ++

$f''(x) = \frac{x^3(-2) - (-2x+4)3x^2}{x^6} = \frac{x(-2) - (-2x+4)3}{x^4} = \frac{4x - 12}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ +

Dort hat $f''(x)$ einen Vorzeichenwechsel von " - " nach " + "; $f(3) = \frac{13}{9}$

$\Rightarrow$ WP$(3 \mid \frac{13}{9})$ ++

1.2.3 Allg. Geradengleichung: $y = mx + t$

$m = f'(1) = 2$ und $P(1 \mid 1)$ (da $f(1) = 1$) in Geradengleichung einsetzen

$1 = 2 + t \Rightarrow t = -1$

Also: $g: y = 2x - 1$ mit $f_{-2}(x)$ gleichsetzen: $g(x) = f_{-2}(x)$ ++

$$2x - 1 = \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2}$$

$$2x^3 - x^2 = x^2 + 2 - 2$$

$$2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

NST erraten: $x_1 = 1$ da $1 - 1 - 1 + 1 = 0$

Polynomdivision: +++

$(x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) = x^2 - 1$

$-(x^3 - x^2)$

$\quad -x + 1 \qquad\qquad x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow x_2 = 1$ und $x_3 = -1$ +

$\quad -(-x + 1)$

$\qquad -$

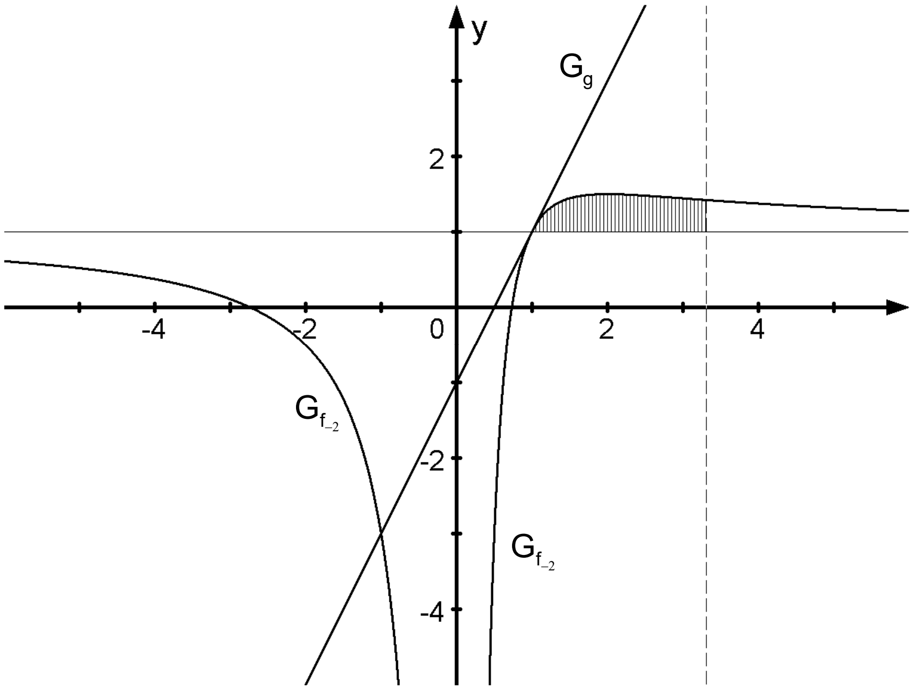
Weiterer gemeinsamer Punkt: $S(-1\,|\,-3)$ mit $g(-1) = f_{-2}(-1) = -3$ +

1.2.4 $HP(2\,|\,1{,}5)$; $WP(3\,|\,1{,}44)$ +

Nullstellen: $(-2{,}73\,|\,0)$ und $(0{,}73\,|\,0)$ +

$P(1\,|\,1)$ und $S(-1\,|\,-3)$ +

$f_{-2}(5) = 1{,}32$; $f_{-2}(-5) = 0{,}52$ +



++

1.3.1 $A(u) = \int_1^u (f_{-2}(x) - 1)dx = \int_1^u (1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - 1)dx = \int_1^u (\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2})dx = \left[2\ln x + \frac{2}{x}\right]_1^u =$

$= (2\ln(u) + \frac{2}{u}) - (2\ln(1) + 2) = 2\ln(u) + \frac{2}{u} - 2$ +++++

$A(u) = 2\ln(u) + \frac{2}{u} - 2 \;\to \infty$ für $x \to \infty \;\Rightarrow$ Es existiert kein Grenzwert. +++

1.3.2 $A(u) = 1 \Leftrightarrow 2\ln(u) + \frac{2}{u} - 2 = 1 \Leftrightarrow 2\ln(u) + \frac{2}{u} - 3 = 0$

Sei $d(u) = 2\ln(u) + \frac{2}{u} - 3$, dann ist $d'(u) = \frac{2}{u} - \frac{2}{u^2}$ +++

Also: $u_{n+1} = u_n - \dfrac{d(u_n)}{d'(u_n)} = u_n - \dfrac{2\ln(u_n) + \frac{2}{u_n} - 3}{\frac{2}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}}$

Mit $u_0 = 3$ folgt: Schraffur: +

$u_1 = 3 - \frac{-0{,}136108756}{\frac{4}{9}} = 3{,}306244701 \approx 3{,}306$

$u_2 = 3{,}306 - \frac{-0{,}003561323}{0{,}421971966} = 3{,}314439715 \approx 3{,}314$ $u_3 = 3{,}314 - \frac{-0{,}00018786}{0{,}421393994} = 3{,}314445806 \approx 3{,}31$

$A(u) = 1$ für $u \approx 3{,}31$ ++++

2.1 $I(t) = I_{max} e^{-0,25t}$

$$0,05 I_{max} = I_{max} e^{-0,25 t_E}$$

$$0,05 = e^{-0,25 t_E}$$

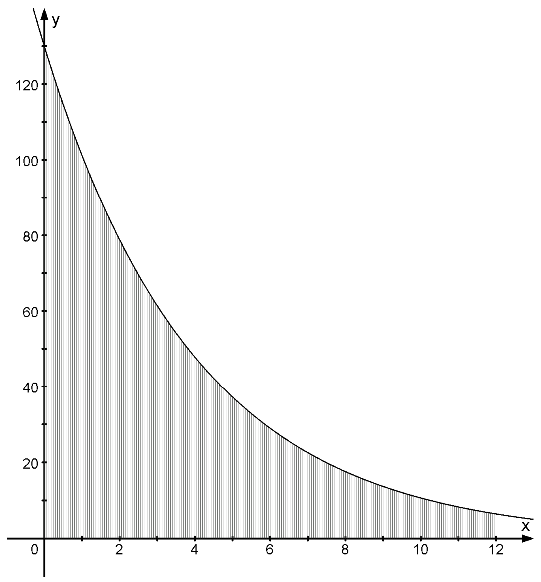
$$\ln(0,05) = -0,25 t_E$$

$$t_E = 11,98292909 \approx 12$$

++++

2.2

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I(t)	130	101,2	78,9	61,4	47,8	37,3	29,0	22,6	17,6	13,7	10,7	8,3	6,5



Wertetabelle und Maßstab: +++
Graph: ++

2.3.1 $\int_0^{t_E} I(t)dt = \int_0^{12} 130 e^{-0,25t} dt = \left[130 \cdot \frac{1}{-0,25} e^{-0,25t}\right]_0^{12} = -520 e^{-3} + 520 e^0 = 520 - 25,89 = 494,11$

Ansatz: +
Stammfkt.: +
Fläche: +
Schraffur: +

2.3.2 Für $t \to 0$ folgt $Q \to 520$

$520 \triangleq 100\% \Rightarrow \frac{520}{494,11} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{494,11 \cdot 100}{520} = 95,02\%$ +++