

2010 A I Lösung

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$ mit $\text{ID}_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a . (5 BE)

$$f_a(x) = -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2 = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = a; \quad x_3 = 5$$

1. Fall: $a = 0$

$$x_1 = 0 \quad (2x)$$

$$x_2 = 5 \quad (2x)$$

2. Fall: $a = 5$

$$x_1 = 0 \quad (1x)$$

$$x_2 = 5 \quad (3x)$$

3. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$

$$x_1 = 0 \quad (1x)$$

$$x_2 = a \quad (1x)$$

$$x_3 = 5 \quad (2x)$$

1.2 Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P(4 | -\frac{1}{2})$ auf dem Graphen der Funktion f_a liegt. (3 BE)

Es muss gelten:

$$f_a(4) = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{8} \cdot 4 \cdot (4-a)(4-5)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (4-a)(-1)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$4-a = 1$$

$$a = 3$$

2.0 Nun wird $a = 3$ gesetzt. Die Funktion f_3 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$.

2.1 Zeigen Sie, dass sich die Funktion f auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x)$ darstellen lässt. (3 BE)

$$f(x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$$

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x^2 - 3x)(x^2 - 10x + 25)$$

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 3x^3 + 30x^2 - 75x)$$

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x)$$

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. (9 BE)

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{8}(4x^3 - 39x^2 + 110x - 75) = 0$$

Lösung erraten: $f'(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$$(4x^3 - 39x^2 + 110x - 75) : (x - 1) = 4x^2 - 35x + 75$$

$4x^3 - 4x^2$	$4x^2 - 35x + 75 = 0$
$-35x^2 + 110x$	
$-35x^2 + 35x$	
$75x - 75$	
$75x - 75$	
$-$	

$$x_{2/3} = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 75}}{2 \cdot 4} = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{8} = \frac{35 \pm 5}{8} = \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 3,75 \end{array} \right.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{8}(12x^2 - 78x + 110)$$

$$f''(1) = -\frac{1}{8}(12 \cdot 1^2 - 78 \cdot 1 + 110) = -5,5 < 0 \Rightarrow \text{rk} \Rightarrow \text{HP} \left. \vphantom{f''(1)} \right\} \Rightarrow \text{HP}_1(1|4)$$

$$f(1) = -\frac{1}{8}(1^4 - 13 \cdot 1^3 + 55 \cdot 1^2 - 75 \cdot 1) = 4$$

$$f''(3,75) = -\frac{1}{8}(12 \cdot 3,75^2 - 78 \cdot 3,75 + 110) = \frac{55}{32} > 0 \Rightarrow \text{lk} \Rightarrow \text{TP} \left. \vphantom{f''(3,75)} \right\} \Rightarrow \text{TP}(3,75|-0,55)$$

$$f(3,75) = -\frac{1}{8}(3,75^4 - 13 \cdot 3,75^3 + 55 \cdot 3,75^2 - 75 \cdot 3,75) = -\frac{1125}{2048} \approx -0,55$$

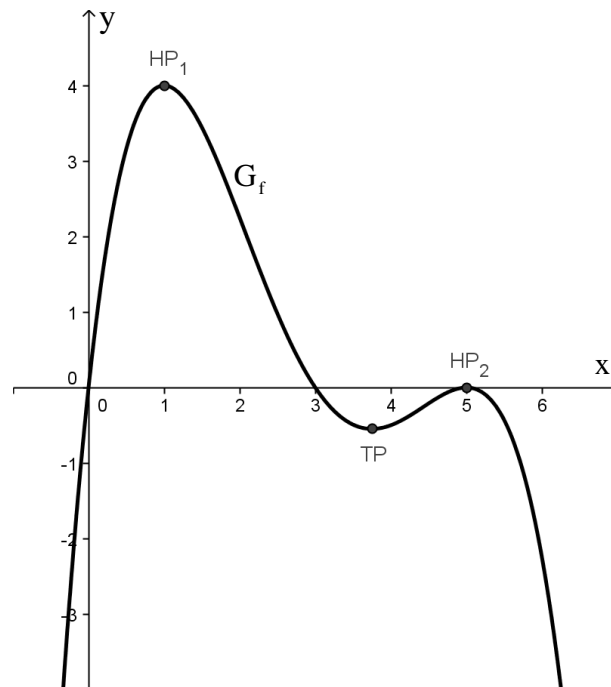
$$f''(5) = -\frac{1}{8}(12 \cdot 5^2 - 78 \cdot 5 + 110) = -2,5 < 0 \Rightarrow \text{rk} \Rightarrow \text{HP} \left. \vphantom{f''(5)} \right\} \Rightarrow \text{HP}_2(5|0)$$

$$f(5) = -\frac{1}{8}(5^4 - 13 \cdot 5^3 + 55 \cdot 5^2 - 75 \cdot 5) = 0$$

- 2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-0,25 \leq x \leq 6$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

Maßstab auf beiden Achsen: $1LE \hat{=} 1cm$

(4 BE)



- 2.4 Der Graph der Funktion f und die x -Achse schließen im 4. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau.

(4 BE)

$$A = -\int_3^5 f(x) dx$$

$$A = -\int_3^5 -\frac{1}{8}(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x) dx$$

$$A = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{13}{4} x^4 + \frac{55}{3} x^3 - \frac{75}{2} x^2 \right]_3^5$$

$$A = \frac{1}{8} \left(-52 \frac{1}{12} - \left(-57 \frac{3}{20} \right) \right)$$

$$A = \frac{19}{30}$$

- 3.0 Forscher untersuchten jeweils fünf Tage lang das Wachstum von Bakteriensorten. Hierbei ergab sich, dass die von den Bakterien bedeckte Fläche annähernd durch die reelle Funktion

$A: t \mapsto A(t)$ mit $A(t) = \frac{1}{8}(t^3 + at^2 + bt + c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $t \in [0; 5]$ beschrieben werden kann, wobei $A(t)$ die bedeckte Fläche (in mm^2) zum Zeitpunkt t (in Tagen) bezeichnet.

Bei einer bestimmten Sorte war zu Beginn des Untersuchungszeitraums ($t = 0$) die von den Bakterien bedeckte Fläche 1mm^2 groß. Nach zwei Tagen hat der Bestand sein Maximum mit 5mm^2 erreicht.

- 3.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c und damit $A(t)$. (6 BE)

$$\left[\text{Ergebnis: } A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8) \right]$$

$$A(t) = \frac{1}{8}(t^3 + at^2 + bt + c)$$

$$A'(t) = \frac{1}{8}(3t^2 + 2at + b)$$

$$A(0) = 1 \qquad \frac{1}{8}c = 1 \qquad c = 8$$

$$A(2) = 5 \quad \frac{1}{8}(2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 8) = 5 \quad 4a + 2b = 24 \quad \left. \vphantom{A(2)} \right\}$$

$$A'(2) = 0 \quad \frac{1}{8}(3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b) = 0 \quad 4a + b = -12 \quad \left. \vphantom{A'(2)} \right\}$$

$$\underline{\qquad \qquad \qquad} \\ b = 36$$

$$4a + 36 = -12 \Rightarrow 4a = -48 \Rightarrow a = -12$$

Somit folgt: $A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$

- 3.2 Berechnen Sie die von den Bakterien nach drei Stunden bedeckte Fläche gerundet auf eine Nachkommastelle genau. (2 BE)

Da t in Tagen gerechnet wird folgt: $3h \hat{=} \frac{3}{24}d = \frac{1}{8}d$, also $t = \frac{1}{8}$

$$A\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^3 - 12 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + 36 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + 8\right) \approx 1,5$$

- 3.3 Ermitteln Sie die Wendestelle t_w der Funktion A und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (5 BE)

$$A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$$

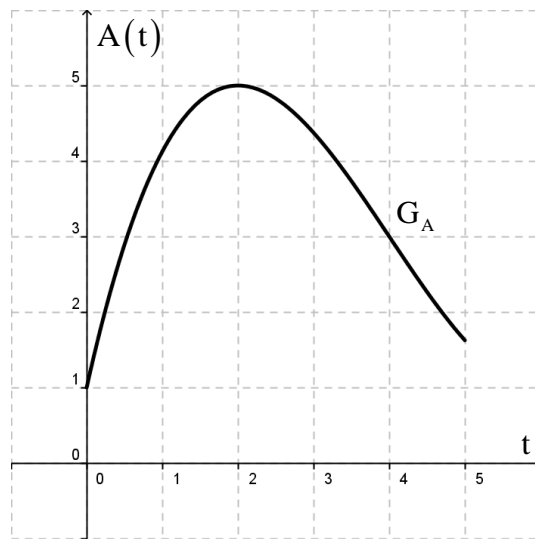
$$A'(t) = \frac{1}{8}(3t^2 - 24t + 36)$$

$$A''(t) = \frac{1}{8}(6t - 24) = 0 \Rightarrow t_w = 4 \quad (1x) \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow t_w = 4 \text{ ist Wendestelle}$$

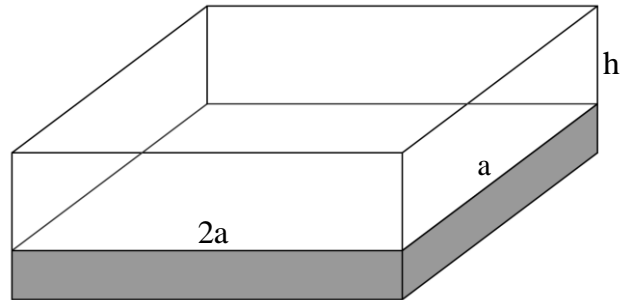
$A'(t)$ gibt die Änderungsrate der Fläche an.

Da $A'(4) = \frac{1}{8}(3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 36) = -1,5 < 0$ ist, ist die Änderungsrate negativ, d.h. die bedeckte Fläche nimmt ab. Da nun aber $A''(4) = 0$ muss die Änderungsrate dort eine Extremum haben. Insgesamt ist somit die Abnahme der bedeckten Fläche nach 4 Tagen am größten.

- 3.4 Zeichnen Sie für $t \in [0; 5]$ den Graphen der Funktion A mit Hilfe vorliegender Ergebnisse. (3 BE)



- 4.0 Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge $2a$, der Breite a und der Höhe h . Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt. Die lichtdurchlässige Oberfläche soll 4 m^2 betragen. Führen Sie folgende Rechnungen ohne Einheiten durch.



- 4.1 Bestimmen Sie das Volumen $V(a)$ des Daches in Abhängigkeit von a .
 [Mögliches Ergebnis: $V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$] (4 BE)

Für das Volumen gilt: $V = 2a \cdot a \cdot h = 2a^2h$
 Für die Oberfläche gilt: $O = 2a \cdot a + 2 \cdot 2a \cdot h + 2 \cdot a \cdot h$
 $4 = 2a^2 + 6ah$
 $6ah = 4 - 2a^2$
 $h = \frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a$

Und nun eingesetzt: $V(a) = 2a^2 \left(\frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a \right)$
 $V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$

- 4.2 Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge ID_V der Funktion $V: a \mapsto V(a)$ für den in 4.0 gegebenen Sachzusammenhang. (5 BE)

Um die Definitionsmenge zu bestimmen muss man nun untersuchen, für welche a nun gilt:

$$\begin{aligned}
 V &\geq 0 \\
 \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3 &\geq 0 \\
 \frac{2}{3}a(2 - a^2) &\geq 0
 \end{aligned}$$

Da nun $a \geq 0$ sein muss, folgt:

$$\begin{aligned}
 2 - a^2 &\geq 0 \\
 a^2 &\leq 2 \\
 -\sqrt{2} &\leq a \leq \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit für die Definitionsmenge: $ID_V = [0; \sqrt{2}]$

Alternative:

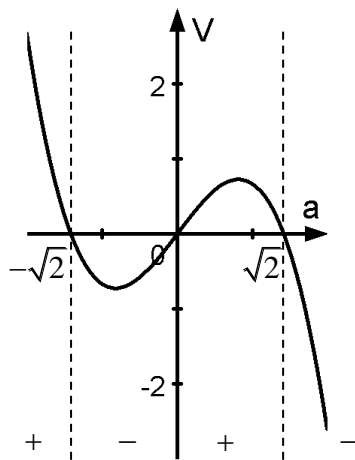
Man könnte zunächst auch erst die Nullstellen der Funktion $V(a)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
 V(a) &= 0 \\
 \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3 &= 0 \\
 -\frac{2}{3}a(a^2 - 2) &= 0
 \end{aligned}$$

Also: $a_1 = 0$

und $a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a_{2/3} = \pm\sqrt{2}$

Skizziert man nun unter Beachtung des Öffnungsfaktors den Graphen der Funktion $V(a)$



Vorzeichen: $V(a)$ + - + -

Da für die Länge gelten muss: $a \geq 0$

Folgt für die Definitionsmenge: $ID_V = [0; \sqrt{2}]$

- 4.3 Ermitteln Sie a so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die zugehörige Höhe h . (7 BE)

$$V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$$

$$V'(a) = \frac{4}{3} - 2a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}; a_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{D}_V$$

$$V''(a) = -4a$$

$$V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. für } a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Da $V(0) = 0$ und $V(\sqrt{2}) = 0$ ist, liegt maximales Volumen für $a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ vor.

Nach Aufgabe 4.1 folgt dann für die Höhe h :

$$h = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,544$$

Das maximale Volumen ist zwar hier nicht gefragt, aber dafür würde folgen:

$$V_{\max} = V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8}{9} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,73$$