

2009 AI

1.0 Von der ganzrationalen Funktion $f : x \mapsto f(x)$, $ID_f = \mathbb{R}$ dritten Grades ist die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ gegeben.

Der Graph G_f schneidet die x -Achse an der Stelle $x_1 = -1$ und die y -Achse im Punkt $P(0 | \frac{5}{4})$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. (5 BE)

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + a$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + ax + b$$

Nun setzt man die Koordinaten des Punktes P ein, so folgt:

$$f(0) = b = \frac{5}{4}$$

$$\text{Man erhält nun: } f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + ax + \frac{5}{4}$$

Jetzt weiß man noch, dass die Funktion f die Nullstelle $x_1 = -1$ hat, somit folgt:

$$f(-1) = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot (-1)^3 - \frac{9}{4} \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + \frac{5}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{9}{4} - a + \frac{5}{4} = 0$$

$$a = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Somit folgt für } f(x): f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$$

2.0 Gegeben sind die Funktionen $g_a : x \mapsto \frac{1}{4}(x+1)(x^2 - 10x + a)$ mit $ID_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$.

2.1 Zeigen Sie, dass sich $g_a(x)$ auch in der Form $g_a(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + ax - 10x + a)$ darstellen lässt und dass für $a = 5$ gilt: $g_5(x) = f(x)$ mit der Funktion f aus Teilaufgabe 1. (3 BE)

$$g_a(x) = \frac{1}{4}(x+1)(x^2 - 10x + a)$$

$$g_a(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 10x^2 + ax + x^2 - 10x + a)$$

$$g_a(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + ax - 10x + a)$$

$$g_5(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 5x - 10x + 5) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 - 5x + 5) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{4} = f(x)$$

2.2 Berechnen Sie, für welche Werte von a der Graph der Funktion g_a keinen Extrempunkt besitzt. (6 BE)

$$g_a(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + ax - 10x + a)$$

$$g_a'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 18x + a - 10) = 0$$

Damit der Graph der Funktion g_a keine Extrema besitzt muss gelten: $D \leq 0$

(Für $D=0$ würde man einen Terrassenpunkt erhalten und dieser ist ja auch kein Extrempunkt!)

$$D = (-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (a - 10) = 324 - 12a + 120 = 444 - 12a \leq 0 \Rightarrow a \geq 37$$

Für die folgenden Teilaufgaben ist $a = 25$ mit $g_{25}(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 15x + 25)$.

2.3 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion g_{25} . (3 BE)

$$g_{25}(x) = \frac{1}{4}(x+1)(x^2 - 10x + 25) = \frac{1}{4}(x+1)(x-5)^2 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad (1x)$$

$$x_2 = 5 \quad (2x)$$

2.4 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen der Funktion g_{25} . (6 BE)

$$g_{25}'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 18x + 15) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot 3} = \frac{18 \pm 12}{6} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

$$g_{25}''(x) = \frac{1}{4}(6x - 18)$$

$$\left. \begin{array}{l} g_{25}''(1) = -3 < 0 \quad \text{rk} \\ g_{25}(1) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{HP}(1|8)$$

$$\left. \begin{array}{l} g_{25}''(5) = 3 > 0 \quad \text{lk} \\ g_{25}(5) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{TP}(5|0)$$

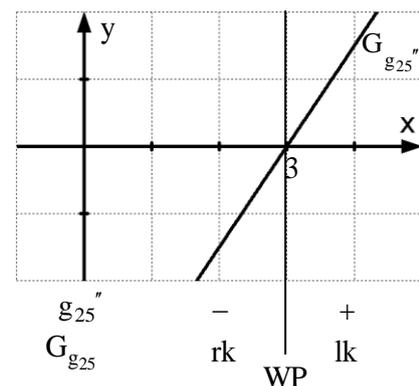
2.5 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion g_{25} rechts- bzw. linksgekrümmt ist sowie die Koordinaten seines Wendepunktes. (4 BE)

$$g_{25}''(x) = \frac{1}{4}(6x - 18) = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

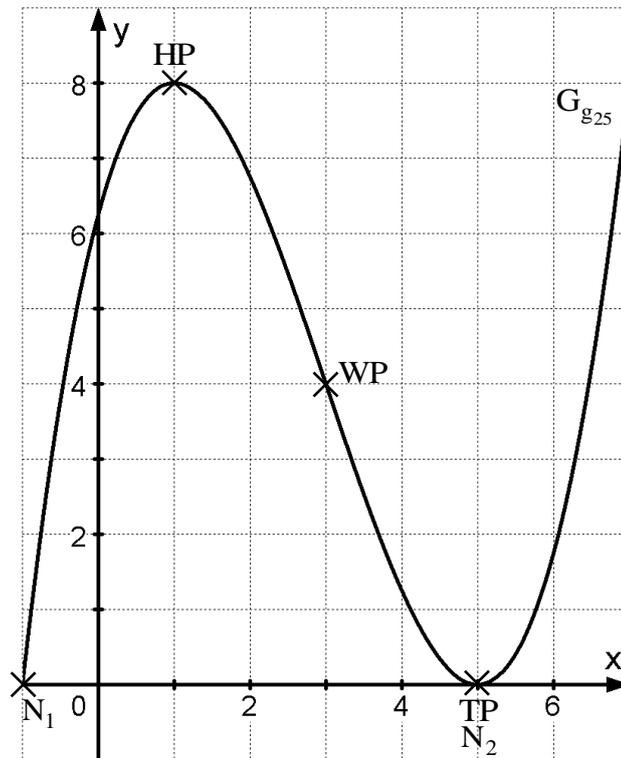
$G_{g_{25}}$ ist rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty; 3]$

$G_{g_{25}}$ ist linksgekrümmt für $x \in [3; \infty[$

$$g_{25}(3) = 4 \Rightarrow \text{WP}(3|4)$$



- 2.6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_{25} im Bereich $-1 \leq x \leq 7$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (5 BE)



- 3.0 Gegeben ist weiter die Funktion

$$p: x \mapsto \frac{1}{4}(x-5)^2 - (x-5) \text{ mit } \mathbb{D}_p = \mathbb{R}.$$

- 3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen g_{25} und p . (7 BE)

$$g_{25}(x) = p(x)$$

$$\frac{1}{4}(x+1)(x-5)^2 = \frac{1}{4}(x-5)^2 - (x-5)$$

$$\frac{1}{4}(x+1)(x-5)^2 - \frac{1}{4}(x-5)^2 + (x-5) = 0$$

$$\frac{1}{4}(x-5) \cdot [(x+1)(x-5) - (x-5) + 4] = 0$$

$$\frac{1}{4}(x-5) \cdot (x^2 - 4x - 5 - x + 5 + 4) = 0$$

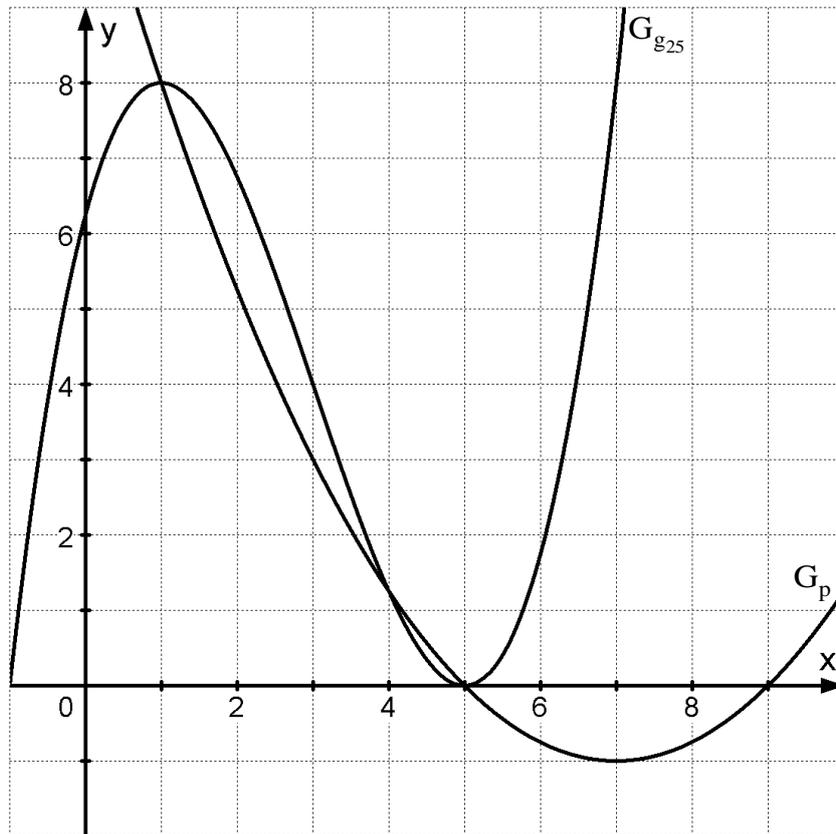
$$\frac{1}{4}(x-5) \cdot (x^2 - 5x + 4) = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 g_{25}(5) &= 0 & S_1(5|0) \\
 g_{25}(4) &= \frac{5}{4} & S_2(4|1\frac{1}{4}) \\
 g_{25}(1) &= 8 & S_3(1|8)
 \end{aligned}$$

- 3.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \leq x \leq 10$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (3 BE)



- 3.3 Die Graphen der Funktionen g_{25} und p schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Flächenmaßzahl des weiter links liegenden Flächenstücks. (5 BE)

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^4 (g_{25}(x) - p(x)) dx \\
A &= \int_1^4 \frac{1}{4}(x-5) \cdot (x^2 - 5x + 4) dx \\
A &= \frac{1}{4} \int_1^4 (x^3 - 5x^2 + 4x - 5x^2 + 25x - 20) dx \\
A &= \frac{1}{4} \int_1^4 (x^3 - 10x^2 + 29x - 20) dx \\
A &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{29}{2}x^2 - 20x \right]_1^4 \\
A &= \frac{1}{4} \left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{103}{12} \right) \right) \\
A &= \frac{45}{15} = 2 \frac{13}{16}
\end{aligned}$$

4 Gegeben ist nun die Funktion

$$h : x \mapsto \begin{cases} g_{25}(x) & \text{für } x \leq 5 \\ p(x) & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

Die Funktion h ist stetig bei $x_0 = 5$ (Nachweis nicht erforderlich!). Untersuchen Sie, ob h an der Stelle $x_0 = 5$ differenzierbar ist. (4 BE)

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 15x + 25) & \text{für } x \leq 5 \\ \frac{1}{4}(x-5)^2 - (x-5) & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

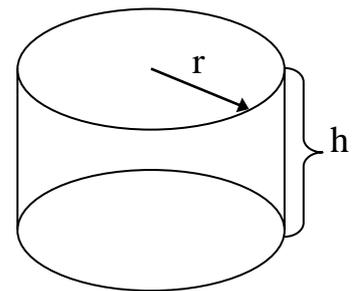
$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 15x + 25) & \text{für } x \leq 5 \\ \frac{1}{4}(x^2 - 10x + 25) - x + 5 & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 15x + 25) & \text{für } x \leq 5 \\ \frac{1}{4}x^2 - 3\frac{1}{4}x + 11\frac{1}{4} & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

$$h' : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}(3x^2 - 18x + 15) & \text{für } x < 5 \\ \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{4} & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 5^-} h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4} (3 \cdot (5-h)^2 - 18 \cdot (5-h) + 15) = 0 \\
\lim_{x \rightarrow 5^+} h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot (5+h) - 3\frac{1}{4} \right) = -\frac{3}{4}
\end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ ist nicht diffbar an der Stelle } x_0 = 5$$

- 5.0 Eine zylinderförmige Trommel (siehe Skizze) besitzt die Gesamtoberfläche $2400 \cdot \pi \text{ cm}^2$. Der Klang der Trommel hängt auch von der Oberfläche und dem Volumen ab. Die Boden- und Deckfläche der Trommel sind mit Fell bespannt. Durch die erhältlichen Fellgrößen ergibt sich, dass ein Radius r von 12 cm bis 30 cm möglich ist. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



- 5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(r)$ der Trommel in Abhängigkeit von r auf.

$$\left[\text{Teilergebnis : } V(r) = \pi \cdot (1200r - r^3) \right] \quad (4 \text{ BE})$$

Für das Volumen gilt:

$$V_Z = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Für die Oberfläche gilt:

$$O = 2400\pi$$

$$2 \cdot \underbrace{r^2\pi}_{\text{Kreisfläche}} + \underbrace{2r\pi h}_{\text{Mantelfläche}} = 2400\pi \quad | : 2\pi$$

$$r^2 + rh = 1200$$

$$rh = 1200 - r^2 \quad | : r$$

$$h = \frac{1200}{r} - r$$

Oben eingesetzt erhält man:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1200}{r} - r \right) = \pi \cdot (1200r - r^3)$$

mit der Definitionsmenge: $ID_V = [12; 30]$

- 5.2 Berechnen Sie r so, dass das Volumen der Trommel den größten Wert (und damit die Trommel den tiefsten Ton) annimmt. (5 BE)

$$V(r) = \pi \cdot (1200r - r^3)$$

$$V'(r) = \pi \cdot (1200 - 3r^2) = 0$$

$$1200 - 3r^2 = 0 \Rightarrow 3r^2 = 1200 \Rightarrow r^2 = 400 \Rightarrow r_1 = 20 \in ID_V \quad (r_2 = -20 \notin ID_V)$$

$$V''(r) = -6r\pi$$

$$V''(20) = -120\pi < 0 \quad \text{rk} \Rightarrow \text{rel. Max.}$$

$$\left. \begin{array}{l} V(12) = 12672\pi \\ V(20) = 16000\pi \\ V(30) = 9000\pi \end{array} \right\} \Rightarrow V_{\max} = 16000\pi \text{ für } r = 20$$