2009 AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_k : x \mapsto x \cdot \left(\frac{x^2}{k} - k - 1\right)$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$.

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (8 BE)

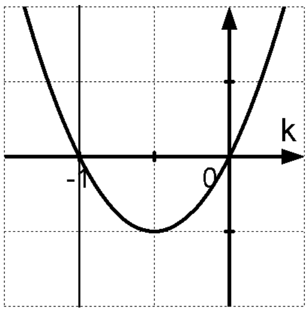
$f_k(x) = x \cdot \left(\frac{x^2}{k} - k - 1\right) = 0$

$x_1 = 0$

$\frac{x^2}{k} - k - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{k} = k + 1 \;\Rightarrow\; x^2 = k(k+1) \;\Rightarrow\; x_{2/3} = \pm\sqrt{k(k+1)} = \pm\sqrt{k^2 + k}$

Für die Fallunterscheidung hat man nun eine quadratische Ungleichung zu lösen.
Denn weitere Nullstellen erhält man nur, wenn $k^2 + k \geq 0$.

Löse $k^2 + k = k(k+1) = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 0 \wedge k_2 = -1$



Anz. d. Lsgen. von $x_{2/3} = \pm\sqrt{k^2 + k}$ 2 1 0 1 2

Somit folgt nun für die Fallunterscheidung:

1. Fall: $k < -1 \vee k > 0$ (es gibt drei Nullstellen)

$x_1 = 0$ (1x)

$x_{2/3} = \pm\sqrt{k^2 + k}$ (je 1x)

2. Fall: $k = -1$ (es gibt eine Nullstelle)

$x_1 = 0$ (3x) (da $x_{2/3} = 0$)

3. Fall: $-1 < k < 0$ (es gibt eine Nullstelle)

$x_1 = 0$ (1x)

Bemerkung: Der Fall $k = 0$ ist nach Vorraussetzung ausgeschlossen!

1.2 Begründen Sie (z.B. mit Hilfe von Aufgabe 1.1), für welchen Wert k_0 der zugehörige Graph einen Terrassenpunkt besitzt . (2 BE)

Da für $k_0 = -1$ die Funktion $f_{-1}(x)$ bei $x_1 = 0$ eine dreifache Nullstelle hat, liegt hier ein Terrassenpunkt vor.

Alternative: *Man könnte auch die erste Ableitung der Funktion f bilden und untersuchen, für welches k die Ableitung eine doppelte Nullstelle hat (also keine Änderung des Monotonieverhaltens vorliegt).*

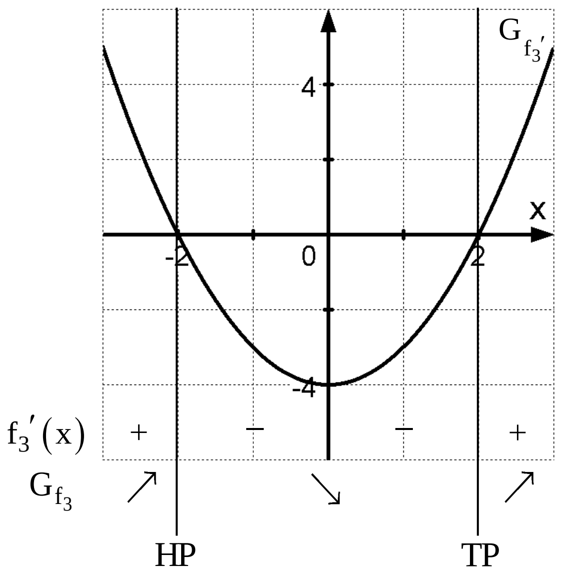
1.3 Bestimmen Sie die Werte von k so, dass der jeweils zugehörige Graph G_{f_k} durch den Punkt $P(-3|3)$ geht. (4 BE)

$$f_k(-3) = 3$$
$$-3 \cdot \left(\frac{(-3)^2}{k} - k - 1 \right) = 3$$
$$\frac{9}{k} - k - 1 = -1$$
$$\frac{9}{k} = k$$
$$9 = k^2$$
$$k_{1/2} = \pm 3$$

2.0 Nun sei $k = 3$. Man erhält die Funktion f_3 mit $f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$.

2.1 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_3 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen. (6 BE)

$$f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$$
$$f_3'(x) = x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2$$



$$f_3(-2) = 5\tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad HP\left(-2 \middle| 5\tfrac{1}{3}\right)$$
$$f_3(2) = -5\tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad TP\left(2 \middle| -5\tfrac{1}{3}\right)$$

2.2 Berechnen Sie die x-Koordinate desjenigen Punktes, in dem der Graph G_{f_3} die kleinstmögliche Steigung besitzt. Begründen Sie auch, warum es keinen Punkt gibt, in dem der Graph größtmögliche Steigung besitzt. (5 BE)

Da der Graph der Funktion $f_3'(x) = x^2 - 4$ einer nach oben geöffneten Parabel entspricht, nimmt die Steigung ihren minimalen Wert im Scheitel, also an der Stelle $x_1 = 0$ an.

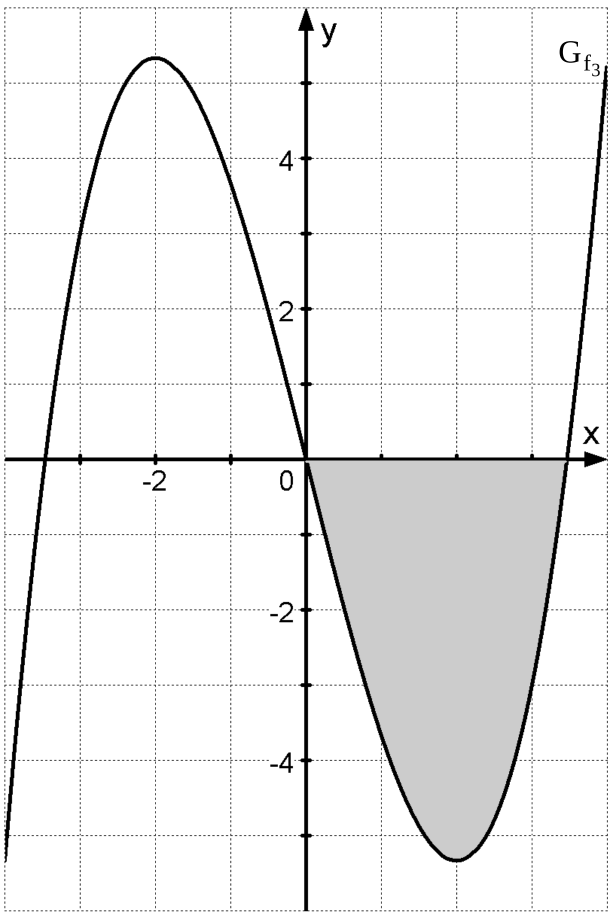
Da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_3'(x) \to \infty$ (nach oben geöffnete Parabel!) gibt es keinen Punkt in dem der Graph größtmögliche Steigung hat.

2.3 Geben Sie die Nullstellen von f_3 an und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion für $-4 \le x \le 4$ in ein Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1cm. (5 BE)

$f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4x = \frac{1}{3}x\left(x^2 - 12\right) = 0$

$x_1 = 0$

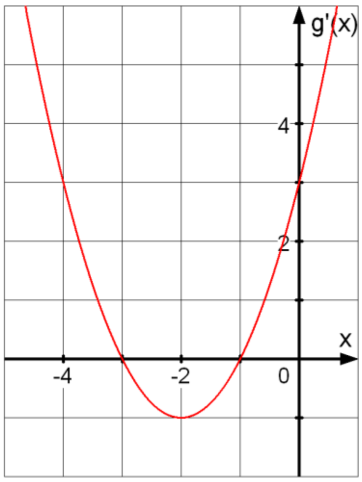
$x^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3,46$



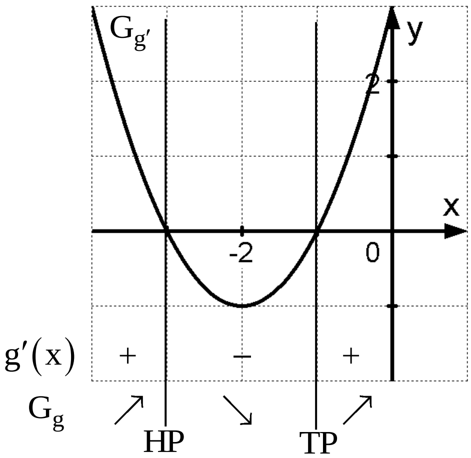
2.4 Der Graph G_{f_3} und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

$$A=\int_0^{\sqrt{12}}\left(0-f_3(x)\right)dx=\int_0^{\sqrt{12}}\left(-\tfrac{1}{3}x^3+4x\right)dx=\left[-\tfrac{1}{12}x^4+2x^2\right]_0^{\sqrt{12}}$$
$$A=-\tfrac{1}{12}\cdot 144+2\cdot 12-0=12$$

3.0 Nebenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades an:



3.1 Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion g einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt. (7 BE)



Der Graph der Funktion g hat an der Stelle $x_1=-3$ einen Hochpunkt. Die Funktion $g'(x)$ ändert an dieser Stelle ihr Vorzeichen von + nach –, also geht der Graph der Funktion g von sms auf smf über.
Der Graph der Funktion g hat an der Stelle $x_2=-1$ einen Tiefpunkt. Die Funktion $g'(x)$ ändert an dieser Stelle ihr Vorzeichen von – nach + , also geht der Graph der Funktion g von smf auf sms über.

Der Graph der Funktion g hat an der Stelle $x_3 = -2$ einen Wendepunkt. Der Graph der Funktion $g'(x)$ hat an dieser Stelle einen Tiefpunkt, somit hat $g''(x)$ an dieser Stelle ein Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (Änderung des Monotonieverhaltens von $g'(x)$!)

3.2 Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten den Funktionsterm $g'(x)$ und anschließend den Funktionsterm $g(x)$ derjenigen Funktion g, deren Wendepunkt auf der x-Achse liegt. (7 BE)

Mit Hilfe der Punktscheitelform folgt zunächst: $g'(x) = a(x+2)^2 - 1$

Setzt man nun den Punkt $P(0|3)$ in $g'(x)$ ein, so folgt:

$g'(0) = a \cdot 2^2 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad 4a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

Also: $g'(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 4x + 3$

Dann folgt für $g(x)$: $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Da der Wendepunkt der Funktion $g(x)$ auf der x-Achse liegen soll folgt nun weiter:

$$\begin{aligned} g(-2) &= 0 \\ \tfrac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + c &= 0 \\ -\tfrac{8}{3} + 8 - 6 + c &= 0 \\ c &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Also: $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$

4.0 Die Gebührenordnung des Paketdienstes „Paket Ahoi“ enthält folgende Klausel: „Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises 100 cm nicht überschreiten.“ Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet!

4.1 Berechnen Sie das Volumen $V(d)$ eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 100 cm beträgt. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an. (5 BE)

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: V(d) = \pi \cdot \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3\right)\right]$

Für das Volumen eines Zylinders gilt: $V_Z = r^2\pi h$

Nun ist $r = \frac{d}{2}$, also folgt: $V_Z = \frac{1}{4}d^2\pi h$

Des weiteren gilt: $d + h = 100 \quad \Rightarrow \quad h = 100 - d$

Das nun eingesetzt, so folgt: $V(d) = \frac{1}{4}d^2\pi(100-d) = 25d^2\pi - \frac{1}{4}d^3\pi = \pi\left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3\right)$

Den kleinsten Radius bzw. den kleinsten Durchmesser des Zylinders erhält man für $d = 0$, die kleinste Höhe erhält man, wenn gilt: $h = 100 - d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 100$

Somit folgt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_V = [0;100]$

Bemerkung: Manche stören sich aber an den geschlossenen Klammer und deswegen ist es an manchen Schulen auch oft der Fall, dass die Definitionsmenge offene Klammern hat, also: $\mathbb{D}_V = \left]0;100\right[$.

4.2 Bestimmen Sie nun die Maße desjenigen zylinderförmigen Päckchens, das dabei maximales Volumen aufweist. (7 BE)

$$V(d) = \pi\left(25d^2 - \tfrac{1}{4}d^3\right)$$

$$V'(d) = \pi\left(50d - \tfrac{3}{4}d^2\right) = 0$$

$$50d - \tfrac{3}{4}d^2 = -\tfrac{3}{4}d\left(d - 66\tfrac{2}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 0 \quad \wedge \quad d_2 = 66\tfrac{2}{3}$$

$$V''(d) = \pi\left(50 - \tfrac{3}{2}d\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} V''\left(66\tfrac{2}{3}\right) = -50\pi < 0 \text{ rk} \\ V(0) = 0 \\ v(100) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{max imales Volumen für } d_2 = 66\tfrac{2}{3}$$

Hat man in der Aufgabe 4.1 die Grenzen der Definitionsmenge offen gewählt, so muss man die letzten beiden Zeilen ersetzen durch:

$$\lim_{d\to 0} V(d) = ... = 0$$

$$\lim_{d\to 100} V(d) = ... = 0$$

Da nämlich die Klammern offen sind gehören die beiden Werte $d = 0$ und $d = 100$ nicht zur Definitionsmenge und dürfen deshalb nicht eingesetzt werden. Es ist eine Grenzwertbetrachtung notwendig.