2008 AI

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion

$f_k: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{k}{2}x^2 + 2x - 2k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$.

Der Graph wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph G_{f_k} für jedes k zwei relative Extremstellen besitzt. (4 BE)

1.2 Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente des Graphen G_{f_k}.

Bestätigen oder widerlegen Sie anhand Ihres Ergebnisses die Aussage: "Für $k > 0$ gilt: Je größer der Wert von k, desto steiler die Tangente." (Ausführliche Rechnung nicht erforderlich!) (6 BE)

1.3 Weisen Sie nach, dass die Tangente an G_{f_k} im Schnittpunkt mit der y-Achse eine von k unabhängige Steigung hat. (2 BE)

1.4 Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ einen relativen Hochpunkt besitzt. (3 BE)

2.0 Nun wird $k = 2$ gesetzt. Man erhält also die Funktion f_2.

2.1 Zeigen Sie, dass der Funktionsterm von f_2 sich auch in der Form

$f_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)(x - 2)$ schreiben lässt und bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion und deren Vielfachheiten. (4 BE)

2.2 Berechnen Sie die maximalen Monotonieintervalle. Geben Sie mit deren Hilfe Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte an. (7 BE)

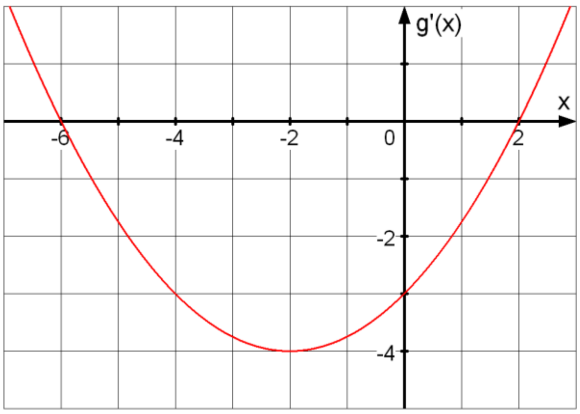
2.3 Zeichnen Sie mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f_2 im Bereich $-2{,}5 \le x \le 3$.

Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (4 BE)

2.4 Der Graph der Funktion f_2 schließt mit den beiden Koordinatenachsen eine vollständig im III. Quadranten liegende Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt.(5 BE)

3.0 Die untere Abbildung zeigt den Graphen der **1. Ableitungsfunktion** g'

$g: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ der Funktion g mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.



3.1 Berechnen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm $g(x)$ der Funktion g. (7 BE)

3.2 Der Graph von g besitzt offensichtlich die Nullstelle $x = 0$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass es für $x > 0$ eine weitere Nullstelle von g geben muss.(4 BE)

3.3 Begründen Sie ohne Rechnung mit Hilfe der obigen Zeichnung, an welcher Stelle der Graph von g eine Wendestelle hat. (3 BE)

4.0 Aus einem Stück Draht der Länge 72 [cm] sollen die Kanten eines Quaders geformt werden, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a bzw. 2a ist.

4.1 Berechnen Sie zunächst das Volumen $v(a)$ des Quaders in Abhängigkeit von der Länge a. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge an.
$\left[\text{Teilergebnis}: v(a) = 36a^2 - 6a^3\right]$ (6 BE)

4.2 Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von a, für den das Volumen V des Quaders sein absolutes Maximum annimmt. Berechnen Sie auch das maximale Volumen.(5 BE)