

2007 AI (Lösung)

1.1 $f_k(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 2kx^2 + k^2x) = \frac{1}{3}x(x^2 - 2kx + k^2) = \frac{1}{3}x(x-k)^2 = 0$

1. Fall: Für $k=0$ ist $x_1=0$ eine dreifache Nullstelle

2. Fall: Für $k \neq 0$ ist $x_1=0$ eine einfache und $x_2=k$ eine doppelte Nullstelle

1.2 $f'_k(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 4kx + k^2)$

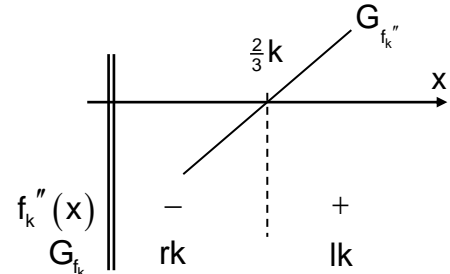
$f''_k(x) = \frac{1}{3}(6x - 4k) = 0 \Rightarrow x_W = \frac{2}{3}k$

G_{f_k} ist rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty; \frac{2}{3}k[$

G_{f_k} ist linksgekrümmt für $x \in [\frac{2}{3}k; \infty[$

Somit hat der Graph G_{f_k} an der Stelle $x_W = \frac{2}{3}k$ einen Wendepunkt.

$f_k(\frac{2}{3}k) = \frac{1}{3}((\frac{2}{3}k)^3 - 2k \cdot (\frac{2}{3}k)^2 + k^2 \cdot \frac{2}{3}k) = \frac{2}{81}k^3 \Rightarrow WP(\frac{2}{3}k | \frac{2}{81}k^3)$



1.3 $f'_k(\frac{2}{3}k) = \frac{1}{3}(3 \cdot (\frac{2}{3}k)^2 - 4k \cdot \frac{2}{3}k + k^2) = -\frac{1}{9}k^2 = m_W$

$WP(\frac{2}{3}k | \frac{2}{81}k^3)$ und $m_W = -\frac{1}{9}k^2$ in $y = mx + t$ einsetzen:

$\frac{2}{81}k^3 = -\frac{1}{9}k^2 \cdot \frac{2}{3}k + t \Rightarrow t = \frac{8}{81}k^3$

Somit gilt für die Wendetangente $t_k: y = -\frac{1}{9}k^2x + \frac{8}{81}k^3$

1.4 Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 | \frac{8}{81}k^3)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $-\frac{1}{9}k^2x + \frac{8}{81}k^3 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{9}k \Rightarrow S_x(\frac{8}{9}k | 0)$

Für die Dreiecksfläche gilt dann: $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9}k \cdot \frac{8}{81}k^3 = \frac{32}{729}k^4 = 288$

$\Rightarrow k = \sqrt[4]{6561} = 9$

2.1 $f_3(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 9x)$

$f'_3(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 12x + 9) = 0$

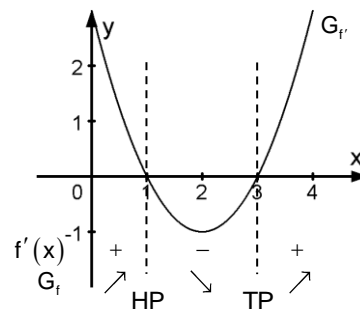
$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

G_{f_3} ist sms für $x \in]-\infty; 1]$ und für $x \in [3; \infty[$

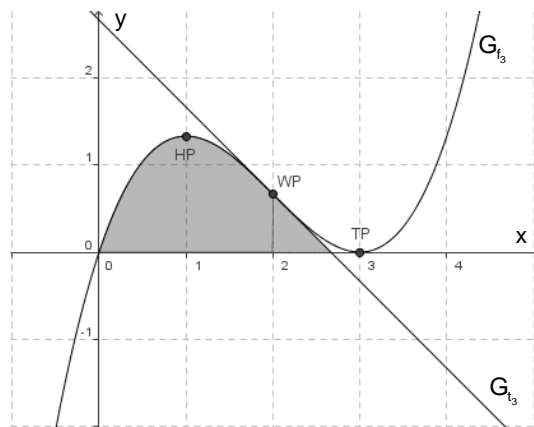
G_{f_3} ist smf für $x \in [1; 3]$

$f_3(1) = \frac{4}{3} \Rightarrow HP(1 | \frac{4}{3})$

$f_3(3) = 0 \Rightarrow TP(3 | 0)$



2.2



2.3 WP(2| $\frac{2}{3}$)

$$t_3 : y = -x + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow x_N = \frac{8}{3}$$

$$A = \int_0^2 f_3(x) dx + \int_2^{\frac{8}{3}} t_3(x) dx$$

$$A = \frac{1}{3} \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx + \int_2^{\frac{8}{3}} (-x + \frac{8}{3}) dx$$

$$A = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^3 + 4,5x^2 \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{2} x^2 + \frac{8}{3} x \right]_2^{\frac{8}{3}}$$

$$A = \frac{1}{3} [4 - 16 + 18 - 0] + \left[-3\frac{5}{9} + \frac{64}{9} - \left(-2 + \frac{16}{3} \right) \right]$$

$$A = 2 + \frac{2}{9}$$

$$A = 2\frac{2}{9}$$

3.1 $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$r(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$r'(-5) = 0 \Rightarrow 75a - 10b + c = 0$$

$$r'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$r(-1) = -\frac{28}{25} \Rightarrow -a + b - c = -\frac{28}{25}$$

$$\underline{72a - 8b = 0}$$

$$\underline{74a - 9b = -\frac{28}{25}}$$

$$56a = \frac{224}{25}$$

$$a = \frac{4}{25}$$

$$72 \cdot \frac{4}{25} - 8b = 0 \Rightarrow b = \frac{36}{25}$$

$$-\frac{4}{25} + \frac{36}{25} - c = -\frac{28}{25} \Rightarrow c = \frac{12}{5}$$

$\left. \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right\} +$

$\left. \begin{array}{l} \cdot 9 \\ \cdot 8 \end{array} \right\} -$

$$r(x) = \frac{4}{25}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{12}{5}x = \frac{4}{25}(x^3 + 9x^2 + 15x)$$

3.2 Überprüfung der Differenzierbarkeit:

$$g' : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } -8 < x < -5 \\ \frac{4}{25}(3x^2 + 18x + 15) & \text{für } -5 < x < 0 \\ -\frac{6}{5}x + \frac{12}{5} & \text{für } 0 < x < 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5^-} g'(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{25}(3(-5+h)^2 + 18(-5+h) + 15) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{g ist diffbar an der Stelle } x_1 = -5$$

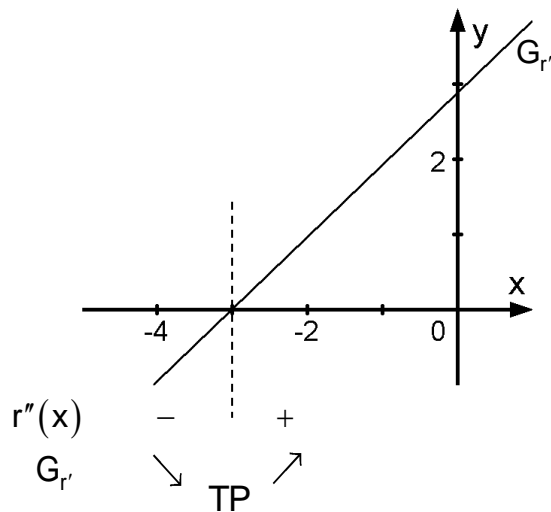
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{25}(3(0-h)^2 + 18(0-h) + 15) = \frac{12}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{6}{5}(0+h) + \frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{g ist diffbar an der Stelle } x_2 = 0$$

3.3 Die Rampe ist genau dann am Steilsten, wenn die Steigungsfunktion $r'(x)$ von $r(x)$ ein lokales Minimum hat. Somit folgt:

$$r(x) = \frac{4}{25}(x^3 + 9x^2 + 15x)$$

$$r'(x) = \frac{4}{25}(3x^2 + 18x + 15)$$

$$r''(x) = \frac{4}{25}(6x + 18) = 0 \Rightarrow x_1 = -3$$



$$r(-3) = \frac{4}{25}((-3)^3 + 9 \cdot (-3)^2 + 15 \cdot (-3)) = \frac{36}{25} = 1,44$$

Der Punkt in welchem die Rampe am steilsten verläuft hat die Koordinaten $P(-3|1,44)$.