2007 AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen
$f_k : x \mapsto \frac{1}{3} \cdot \left(x^3 - 2kx^2 + k^2 x \right)$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k \geq 0$ und $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (5 BE)

1.2 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_{f_k} sowie mit deren Hilfe die Koordinaten des Wendepunktes. (6 BE)
$\left[\text{Teilergebnis}: x_W = \frac{2}{3} k \right]$

1.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente t_k. (4 BE)
$\left[\text{Ergebnis}: t_k : y = -\frac{1}{9} k^2 x + \frac{8}{81} k^3 \right]$

1.4 Bestimmen Sie denjenigen Wert von $k \geq 0$, für den der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks, das von der Wendetangente und den Koordinatenachsen begrenzt wird, 288 FE beträgt. (6 BE)

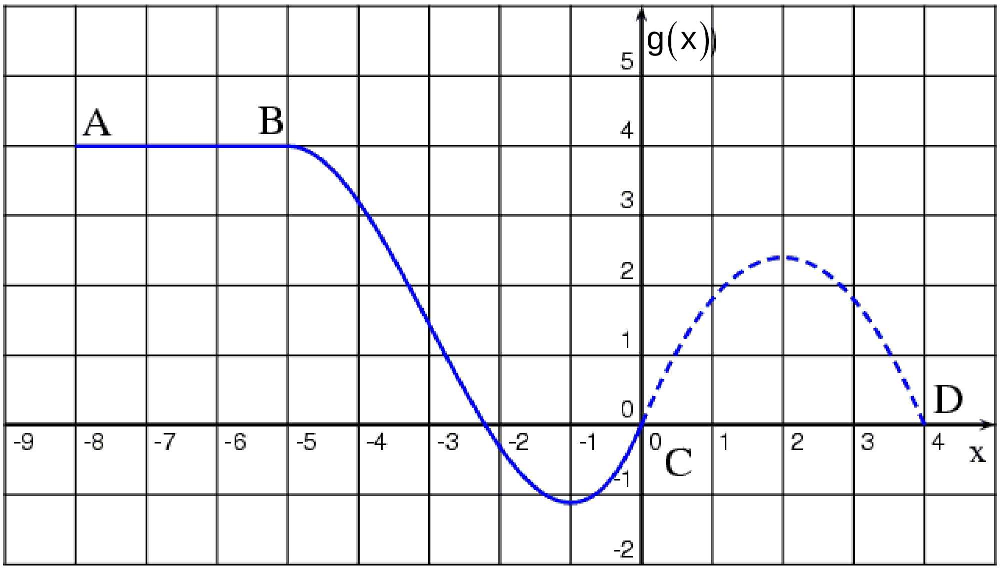
2.0 Nun sei $k = 3$. Man erhält die Funktion f_3 mit $f_k(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - 6x^2 + 9x \right)$.

2.1 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_3 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen. (7 BE)

2.2 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f_3 für $-0{,}5 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem. Zeichnen Sie auch den Wendepunkt und die Wendetangente ein. Maßstab: 1 LE = 2 cm. (5 BE)

2.3 Der Graph G_{f_3}, die Wendetangente und die x-Achse schließen zwei Flächenstücke ein. Markieren Sie das größere der beiden im Koordinatensystem von Teilaufgabe 2.2 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. (8 BE)

3.0 Für einen Snowboard-Sprungwettbewerb wird eine Rampe präpariert. Die Teilnehmer starten von einer waagrechten Plattform (AB), gleiten ab $B(-5|4)$ ohne Knick durch die Rampe (BC) und beginnen den Sprung im Punkt $C(0|0)$. Die Bahnkurve des Sprunges entspricht annähernd einer Parabel.
Skizze des Querschnitts, Flugbahn gestrichelt gezeichnet:



3.1 Der Querschnitt der Rampe (BC) kann durch die ganzrationale Funktion dritten Grades $r: x \mapsto r(x)$ beschrieben werden mit Tiefpunkt $T\left(-1\middle|-\frac{28}{25}\right)$.
Ermitteln Sie den Funktionsterm $r(x)$ dieser Funktion. (9 BE)

3.2 Die Kurve aus obiger Skizze wird durch folgende abschnittsweise definierte Funktion beschrieben:

$$g: x \mapsto \begin{cases} 4 & \text{für} \quad -8 \le x < -5 \\ \frac{4}{25}\left(x^3 + 9x^2 + 15x\right) & \text{für} \quad -5 \le x \le 0 \\ -\frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x & \text{für} \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$$

Die Funktion g ist stetig innerhalb ihrer gesamten Definitionsmenge (Nachweis nicht erforderlich). Begründen Sie rechnerisch, dass die Funktion an den Stellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 0$ differenzierbar ist. (6 BE)

3.3 Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes im abfallenden Teil der Rampe, in dem diese am steilsten ist. (4 BE)