2005 AI

1.0 Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen dritten Grades $f_k : x \mapsto f_k(x)$;
$\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k > 0$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Der Graph G_{f_k} besitzt im Koordinatenursprung die Wendetangente mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}kx$ und enthält den Punkt $P_k\left(-\frac{2}{3}k; \frac{2}{27}k^2\right)$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $f_k(x)$. (7 BE)
$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{3}kx\right]$

$$f_k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f_k'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f_k''(x) = 6ax + 2b$$

$$f_k(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$$
$$f_k''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$
$$f_k'(0) = \tfrac{1}{3}k \quad \Rightarrow \quad c = \tfrac{1}{3}k$$
$$f_k\left(-\tfrac{2}{3}k\right) = \tfrac{2}{27}k^2 \quad \Rightarrow \quad -\tfrac{8}{27}k^3a - \tfrac{2}{9}k^2 = \tfrac{2}{27}k^2$$
$$-\tfrac{8}{27}k^3a = \tfrac{8}{27}k^2$$
$$a = -\tfrac{1}{k}$$
$$f_k(x) = -\tfrac{1}{k}x^3 + \tfrac{1}{3}kx$$

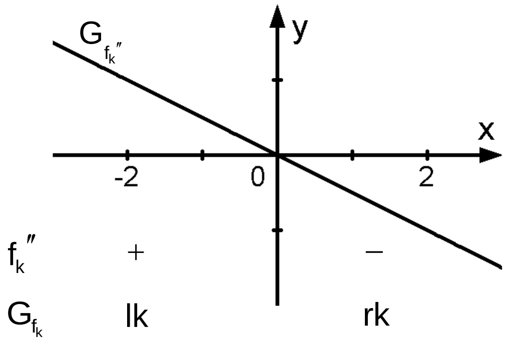
1.2 Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie. (2 BE)

Da $f_k(x)$ nur ungerade Exponenten von x enthält (und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$)
$\Rightarrow$ G_{f_k} ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

1.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte sowie das Krümmungsverhalten des Graphen G_{f_k}. (8 BE)
$\left[\text{Teilergebnis}: x_H = \frac{k}{3}\right]$

$$f_k(x) = -\tfrac{1}{k}x^3 + \tfrac{1}{3}kx$$
$$f_k'(x) = -\tfrac{3}{k}x^2 + \tfrac{1}{3}k = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \tfrac{k^2}{9} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\tfrac{k}{3}$$
$$f_k''(x) = -\tfrac{6}{k}x$$
$$\left.\begin{array}{l} f_k''\left(-\tfrac{k}{3}\right) = -\tfrac{6}{k}\cdot\left(-\tfrac{k}{3}\right) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lk} \\ f_k\left(-\tfrac{k}{3}\right) = -\tfrac{1}{k}\cdot\left(-\tfrac{k}{3}\right)^3 + \tfrac{1}{3}k\cdot\left(-\tfrac{k}{3}\right) = \tfrac{k^2}{27} - \tfrac{k^2}{9} = -\tfrac{2}{27}k^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad TP\left(-\tfrac{1}{3}k \middle| -\tfrac{2}{27}k^2\right)$$
Wegen Symmetrie folgt: $HP\left(\frac{1}{3}k \middle| \frac{2}{27}k^2\right)$

$f_k''(x) = -\frac{6}{k}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 0$



G_{f_k} ist linksgekrümmt für alle $x \in \left]-\infty;0\right]$
G_{f_k} ist rechtsgekrümmt für alle $x \in \left[0;\infty\right[$

1.4 Bestimmen Sie k so, dass der relative Hochpunkt des Graphen G_{f_k} auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 2x$ liegt. (3 BE)

$HP\left(\frac{1}{3}k \middle| \frac{2}{27}k^2\right)$ in $y = 2x$ einsetzen:

$\frac{2}{27}k^2 = 2 \cdot \frac{1}{3}k \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{27}k^2 - \frac{2}{3}k = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{27}k(k-9) = 0$

$k_1 = 9 \quad \wedge \quad (k_2 = 0)$

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $k = 9$ und somit $f_9(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 3x$.

1.5 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_9. (3 BE)

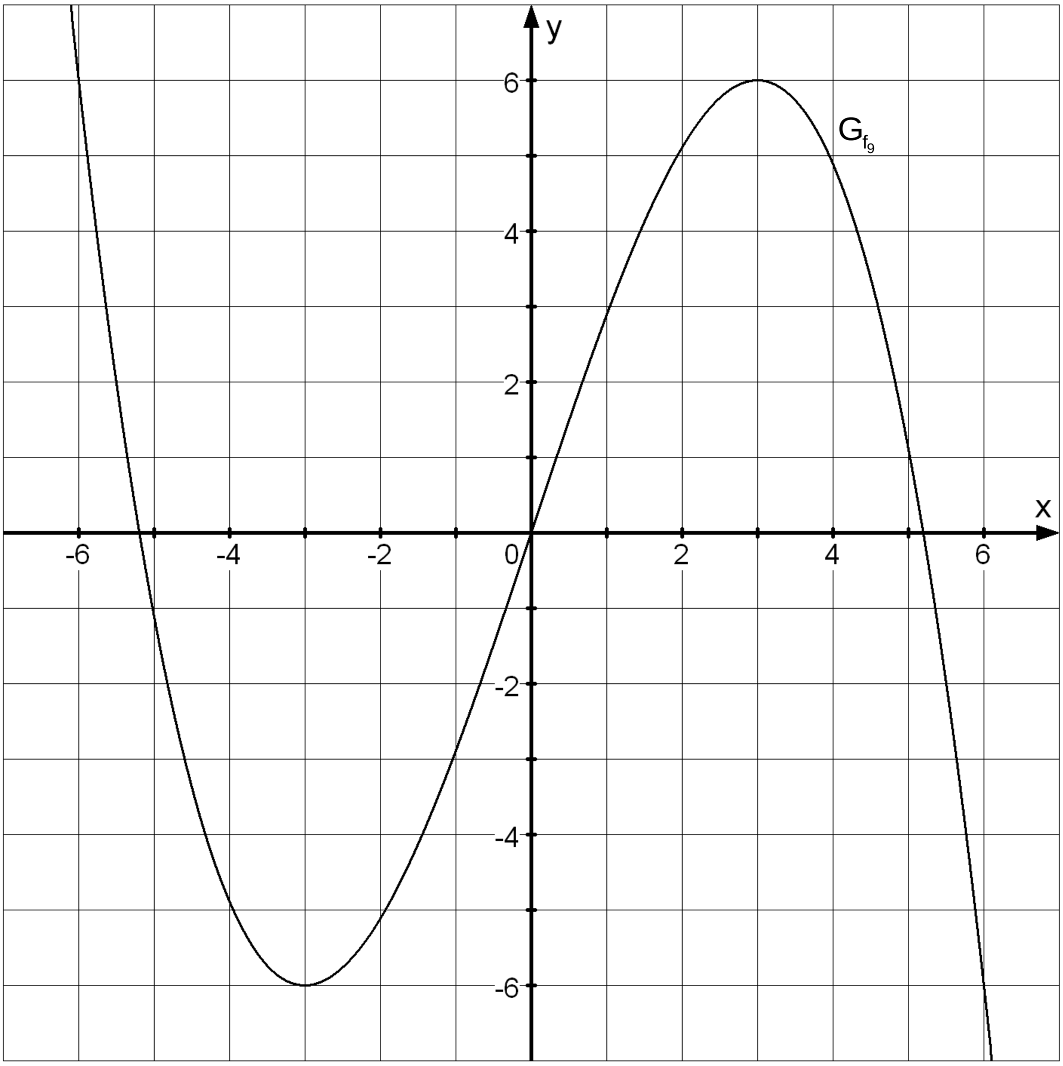
$f_9(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 3x = -\frac{1}{9}x\left(x^2 - 27\right) = 0$

$x_1 = 0$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$

1.6 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_{f_9} für $-6 \le x \le 6$ in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie eine eigene Seite.
Maßstab auf beiden Achsen: $1LE = 1cm$. (6 BE)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f_9(x)$	6	-1,11	-4,89	-6	-5,11	2,89	0	2,89	5,11	6	4,89	1,11	-6



2.1 F ist diejenige Stammfunktion der Funktion f_9 mit $\mathbb{D}_F = \mathbb{R}$, deren Graph G_F den Punkt $A(6;8)$ enthält. Bestimmen Sie den Funktionsterm $F(x)$. (3 BE)

$$F(x) = -\tfrac{1}{36}x^4 + 1{,}5x^2 + C$$

Da $A(6;8) \in G_F$ folgt:

$$F(6) = 8$$
$$-\tfrac{1}{36}\cdot 6^4 + 1{,}5\cdot 6^2 + C = 8$$
$$C = -10$$
$$F(x) = -\tfrac{1}{36}x^4 + 1{,}5x^2 - 10$$

2.2 Ermitteln Sie nur mit Hilfe bereits vorliegender Ergebnisse die maximalen Intervalle, in denen die Funktion F echt monoton zu- bzw. abnimmt. (4 BE)

Da $F'(x) = f_9(x)$ folgt mit 1.6:

F ist echt monoton zunehmend für $x \in \left]-\infty; -\sqrt{27}\right]$ und für $x \in \left[0; \sqrt{27}\right]$

F ist echt monoton abnehmend für $x \in \left[-\sqrt{27}; 0\right]$ und für $x \in \left[\sqrt{27}; \infty\right[$

2.3 Der Graph G_{f_9} schließt mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie deren Gesamtinhalt. (4 BE)

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{27}} \left(f_9(x)\right)dx = 2 \cdot \left[-\tfrac{1}{36}x^4 + 1{,}5x^2\right]_0^{\sqrt{27}} = 2 \cdot \left[-\tfrac{1}{36} \cdot 27^2 + 1{,}5 \cdot 27 - 0\right] = 40{,}5$$

3.0 Gegeben ist die Funktion $p: x \mapsto ax^2 + bx + 3;\ \mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Die Graphen der Funktion p und f_9 besitzen bei $x_0 = -3$ dieselbe Tangente.

3.1 Berechnen Sie den Funktionsterm $p(x)$. (5 BE)

$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: p(x) = x^2 + 6x + 3\right]$

$$p(x) = ax^2 + bx + 3$$
$$p'(x) = 2ax + b$$
$$p(-3) = f_9(-3)$$
$$p'(-3) = f_9'(-3)$$

$$\begin{array}{lll} 9a - 3b + 3 = -6 & 9a - 3b = -9 & 3a - b = -3 \\ -6a + b = 0 & -6a + b = 0 & -6a + b = 0 \\ & & \hline -3a = -3 \Rightarrow a = 1 \end{array}$$

$$-6 + b = 0 \Rightarrow b = 6$$

$$p(x) = x^2 + 6x + 3$$

3.2 Gegeben ist nun die Funktion

$$h: x \mapsto \begin{cases} p(x) & \text{für } x < -3 \\ f_9(x) & \text{für } x \geq -3 \end{cases} \qquad \mathbb{D}_h = \mathbb{R}.$$

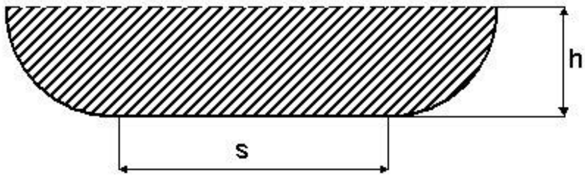
Was lässt sich über Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion h an der Stelle $x_0 = -3$ aussagen? Begründen Sie Ihre Aussage nur mit Hilfe vorliegender Ergebnisse. (3 BE)

Da die Graphen der beiden Funktionen p und f_9 an der Stell $x_0 = -3$ dieselbe Tangente besitzen gilt:

$p(-3) = f_9(-3) \Rightarrow$ h ist stetig an der Stelle $x_0 = -3$

$p'(-3) = f_9'(-3) \Rightarrow$ h ist diffbar an der Stelle $x_0 = -3$

4.0 Der Querschnitt des abgebildeten, oben offenen Kanals ist begrenzt durch zwei Viertelkreisbögen und durch eine Strecke der Länge $s \geq 0$. Die Höhe des Kanals ist h.



4.1 Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche $A(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h, wenn der „Umfang“ (2 Viertelkreisbögen und Strecke s) $5LE$ beträgt.
Ermitteln Sie die größtmögliche geometrisch sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $A: h \mapsto A(h)$. (7 BE)

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: A(h) = 5h - \frac{1}{2}h^2\pi\right]$

Für die schraffierte Querschnittsfläche gilt:

$A = A_{Rechteck} + 2 \cdot A_{Viertelkreis} = s \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot h^2\pi = s \cdot h + \frac{1}{2} \cdot h^2\pi \quad (\text{mit Radius } r = h)$

Für den Umfang gilt:

$U = s + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot h \cdot \pi = s + h \cdot \pi = 5 \quad \Rightarrow \quad s = 5 - h \cdot \pi$

eingesetzt:

$A(h) = (5 - h \cdot \pi) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot h^2\pi = 5h - h^2\pi + \frac{1}{2} \cdot h^2\pi = 5h - \frac{1}{2}h^2\pi$

Für die Definitionsmenge gilt:
kleinste Rechteckshöhe: $h = 0$
kleinste Rechtecksbreite: $s = 5 - h \cdot \pi = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5}{\pi}$

$\mathbb{D}_A = \left[0; \frac{5}{\pi}\right]$

4.2 Bestimmen Sie h so. dass die Querschnittsfläche A den größten Wert besitzt. Berechnen Sie diesen Wert. Beschreiben Sie für diesen Fall die Form der Querschnittsfläche A. (5 BE)

G_A ist Teil einer nach unten geöffneten Parabel, die ihren Maximalwert im Scheitel annimmt (falls dieser in $\mathbb{D}_A$ liegt).

$h_S = -\frac{5}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{5}{\pi} \in \mathbb{D}_A$

$A\left(\frac{5}{\pi}\right) = 5 \cdot \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \pi = \frac{25}{2\pi} = A_{max}$

Die Querschnittsfläche hat die Form eines Halbkreises.