2005 AII

1.1 $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4a}x^4 - 2x\right) \to \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4a}x^4 - 2x\right) \to \infty$

1.2 $f_a(x) = \frac{1}{4a}x^4 - 2x = x\left(\frac{1}{4a}x^3 - 2\right) = 0$

$x_1 = 0$ einfache Nullstelle

$\frac{1}{4a}x^3 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4a}x^3 = 2 \;\Rightarrow\; x^3 = 8a \;\Rightarrow\; x_2 = 2\cdot\sqrt[3]{a}$ einfache Nullstelle

1.3 $f_a(0) = 0 \;\Rightarrow\; O(0|0) \in G_{f_a}$ für alle $a > 0$

$f_a'(x) = \frac{1}{a}x^3 - 2 \;\Rightarrow\; f_a'(0) = -2$ ist unabhängig von a

Folgerung: Graphen haben im Koordinatenursprung alle die gleiche Steigung und somit die gleiche Tangente.

(Tangentengleichung: $y = -2x$)

1.4 $f_a'(2) = \frac{1}{a}\cdot 8 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{8}{a} = 2 \;\Rightarrow\; 8 = 2a \;\Rightarrow\; a = 4$

$f_4(x) = \frac{1}{16}x^4 - 2x$

$f_4'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2$

$f_4''(x) = \frac{3}{4}x^2$

$$\left.\begin{array}{l} f_4(2) = -3 \\ f_4'(2) = 0 \\ f_4''(2) = 3 > 0 \;\Rightarrow\; \text{lk} \end{array}\right\} \Rightarrow TP(2|-3)$$

1.5 $f_4(x) = \frac{1}{16}x^4 - 2x$

$f_4'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2$

$f_4''(x) = \frac{3}{4}x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;\; 2x$

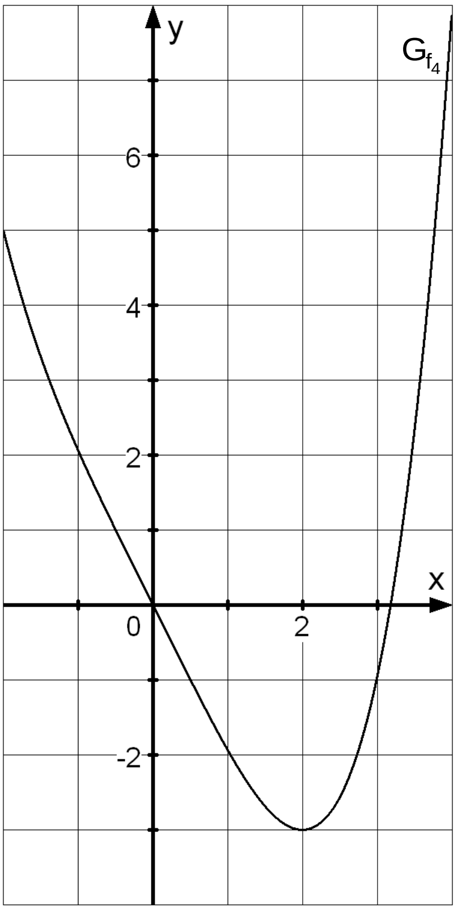
$\Rightarrow$ k.VZW $\Rightarrow$ Käsn $\Rightarrow$ kein WP

Da $f_4''(x) = \frac{3}{4}x^2 \geq 0 \;\Rightarrow\;$ lk für alle $x \in \mathbb{R}$

G_{f_4} ist linksgekrümmt für alle $x \in \mathbb{R}$.

1.6

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_4(x)$	5	2,06	0	-1,94	-3	-0,94	8



1.7 Es gilt:

$F'(x) = f_4(x)$

$F''(x) = f_4'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2 \quad 1x \quad \Rightarrow \quad \text{VZW} \quad \Rightarrow \quad \text{Käs}$

$\Rightarrow \quad x_0 = 2$ ist Wendestelle von F''

1.8.1 Stetigkeit:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{1}{16}x^4 - 2x\right) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{1}{16}(0-h)^4 - 2(0-h)\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{4}x^2 - x\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{4}(0+h)^2 - (0+h)\right) = 0 \\ g(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ ist stetig bei } x_0 = 0$$

Differenzierbarkeit:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^3 - 2 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{1}{4}x^3 - 2\right) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{1}{4}(0-h)^3 - 2\right) = -2 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{2}(0+h) - 1\right) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ ist nicht diffbar bei } x_0 = 0$$

Der Graph der Funktion g ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig aber nicht diffbar, der Graph hat somit an dieser Stelle einen „Knick“.

1.8.2 Siehe Grafik!

1.9

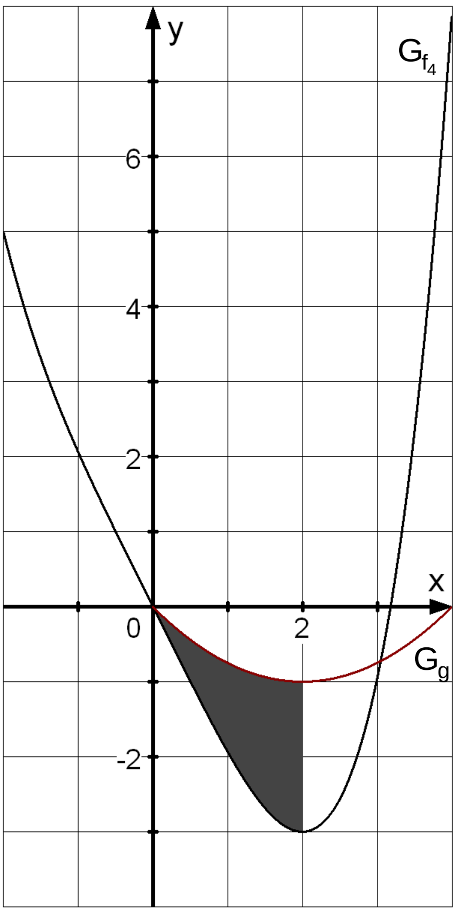
$$A = \int_0^2 \left(g(x) - f_4(x)\right) dx$$

$$A = \int_0^2 \left(\left(\frac{1}{4}x^2 - x\right) - \left(\frac{1}{16}x^4 - 2x\right)\right) dx$$

$$A = \int_0^2 \left(-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + x\right) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{80}x^5 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$A = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 2 = \frac{34}{15}$$



2.1 $w(x)=\frac{1}{100}\left(x^3-15x^2+500\right)$ mit $ID_w=[0;10]$

$w'(x)=\frac{1}{100}\left(3x^2-30x\right)$ mit $ID_{w'}=]0;10[$

$w'(x)$ ist eine Funktion, welche die Steigung und somit auch das Gefälle der Wasserrutsche angibt. Die Frage nach dem stärksten Gefälle ist somit identisch mit dem Problem: „An welcher Stelle ist der Wert der Steigung am kleinsten?“

Definiert man sich die Gefällefunktion $g(x)=w'(x)$ so sucht man jetzt nach der Stelle an der die Funktion g einen relativen Tiefpunkt hat.

$g'(x)=\frac{1}{100}(6x-30)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=5$

$g''(x)=\frac{3}{50} \quad\Rightarrow\quad g''(5)=\frac{3}{50}>0 \;\; \text{lk} \quad\Rightarrow\quad \text{rel. TP}$

Somit hat die Wasserrutsche bei $x_1=5$ das stärkste Gefälle.

2.2 $b(x)=\frac{1}{30}x^2-\frac{35}{36}x+10$ mit $ID_b=[0;15]$

$b'(x)=\frac{1}{15}x-\frac{35}{36}=0 \quad\Rightarrow\quad x_2=14\tfrac{7}{12}$ mit $ID_{b'}=]0;15[$

Da der Graph der Funktion b eine nach oben geöffnete Parabel ist hat man an der Stelle $x_2=14\frac{7}{12}$ eine rel. Tiefstelle.

Somit tropft das Wasser an der Stelle $x_2=14\frac{7}{12}$ herunter.

2.3 $d(x)=b(x)-w(x) \qquad ID_d=[0;10]$

$d(x)=\frac{1}{30}x^2-\frac{35}{36}x+10-\frac{1}{100}\left(x^3-15x^2+500\right)$

$d(x)=\frac{1}{30}x^2-\frac{35}{36}x+10-\frac{1}{100}x^3+\frac{3}{20}x^2-5$

$d(x)=-\frac{1}{100}x^3+\frac{11}{60}x^2-\frac{35}{36}x+5$

2.4 $d(x)=-\frac{1}{100}x^3+\frac{11}{60}x^2-\frac{35}{36}x+5$

$d'(x)=-\frac{3}{100}x^2+\frac{11}{30}x-\frac{35}{36}=0$ mit $ID_{d'}=]0;10[$

$$x_{1/2}=\frac{-\frac{11}{30}\pm\sqrt{\left(-\frac{11}{30}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{3}{100}\right)\cdot\left(-\frac{35}{36}\right)}}{2\cdot\left(-\frac{3}{100}\right)}=\frac{-\frac{11}{30}\pm\sqrt{\frac{4}{225}}}{-\frac{3}{50}}=\frac{-\frac{11}{30}\pm\frac{2}{15}}{-\frac{3}{50}}=\begin{cases}3\frac{8}{9}\in ID_d\\ 8\frac{1}{3}\in ID_d\end{cases}$$

$d''(x)=-\frac{3}{50}x+\frac{11}{30}$ mit $ID_{d''}=]0;10[$

$$\left.\begin{array}{l} d''\left(3\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{15}>0 \;\; \text{lk} \;\Rightarrow\; \text{HP} \\ d\left(3\frac{8}{9}\right)=3{,}40... \end{array}\right\}\Rightarrow \text{HP}\left(3\tfrac{8}{9}\,|\,3{,}40\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} d''\left(8\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{15}<0 \;\; \text{rk} \;\Rightarrow\; \text{TP} \\ d\left(8\frac{1}{3}\right)=3{,}84... \end{array}\right\}\Rightarrow \text{TP}\left(8\tfrac{1}{3}\,|\,3{,}84\right)$$

Randextrema:

$$\left.\begin{array}{l} d(0)=5 \\ d\left(3\frac{8}{9}\right)=3{,}40... \\ d(10)=\frac{65}{18}=3{,}61... \end{array}\right\}\Rightarrow \text{abs. Minimum bei } x=3\tfrac{8}{9}$$

Der kleinste Abstand beträgt $3,40$, somit wird an jeder Stelle der Wasserrutsche der geforderte Mindestabstand eingehalten.