2004 AII

1.0 Gegeben sind die Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie, dass die x-Koordinate des Wendepunkts des Graphen G_{f_a} von a unabhängig ist.

$f_a(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$

$f_a'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - a$

$f_a''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 1 \quad (1x) \quad \Rightarrow \quad \text{VZW} \quad \Rightarrow \quad \text{Käs} \quad \Rightarrow \quad \text{WP}$

$x_W = 1$ ist unabhängig von a.

1.2 Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm $f_a(x)$ auch in der Form $f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a)$ schreiben lässt und bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.
Hinweis: Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch.

$f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a) = \frac{1}{9}(x^3 - 3x^2 - 9ax + 27a) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$

$f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a) = 0$

$x^2 - 9a = 0$

$x^2 = 9a$

$x_1 = 3 \quad (1x) \qquad x_{2/3} = \pm\sqrt{9a} = \pm 3\sqrt{a} \quad (\text{je } 1x)$

1.Fall: $a < 0$

$x_1 = 3 \quad (1x)$

$x_{2/3} = \pm 3\sqrt{a}$ ist nicht definiert

2.Fall: $a > 0 \quad (a \neq 1)$

$x_1 = 3 \quad (1x)$

$x_{2/3} = \pm 3\sqrt{a} \ (\text{je } 1x)$

3.Fall: $a = 1$

$x_1 = 3 \quad (2x)$

$x_2 = -3 \quad (1x)$

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $a = 1$ und $f_1(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 3$.

1.3 Berechnen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen G_{f_1}.

$$f_1(x) = \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 - x + 3$$

$$f_1'(x) = \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}x - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1)}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$f_1''(x) = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1''(3) = \frac{4}{3} > 0 \quad \text{lk} \quad \Rightarrow \quad \text{TP} \\ f_1(3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{TP}(3|0)$$

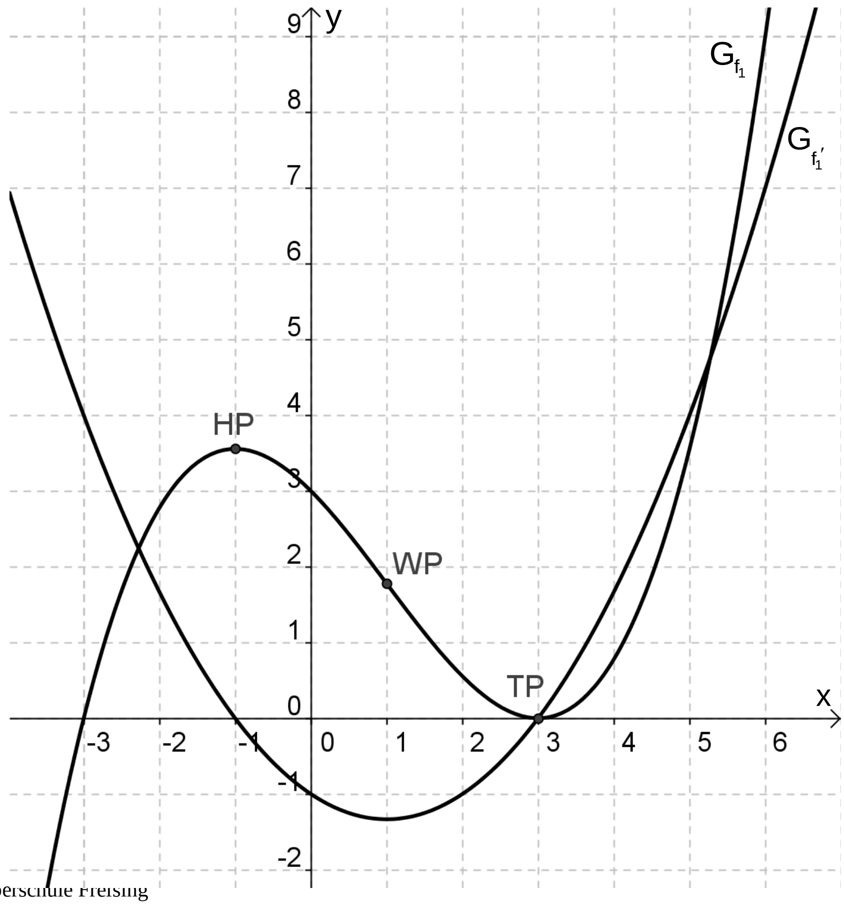
$$\left.\begin{array}{l} f_1''(-1) = -\frac{4}{3} < 0 \quad \text{rk} \quad \Rightarrow \quad \text{HP} \\ f_1(-1) = 3\frac{5}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{HP}\left(-1|3\tfrac{5}{9}\right)$$

Nach Aufgabe 1.1 hat G_{f_1} an der Stelle $x_W = 1$ einen Wendepunkt!

$$f_1(1) = 1\tfrac{7}{9} \quad \Rightarrow \quad \text{WP}\left(1|1\tfrac{7}{9}\right)$$

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_{f_1} für $-3 \le x \le 6$ in ein Koordinatensystem.

Maßstab auf beiden Achsen: $1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$.



1.5 Berechnen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_{f_1} und $G_{f_1'}$ (Ableitung). Runden Sie gegebenenfalls auf 2 Nachkommastellen.
(Teilergebnis: Die ganzzahlige Lösung ist $x = 3$.)

$$f_1(x) = f_1'(x)$$
$$\tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 - x + 3 = \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}x - 1$$
$$\tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x + 4 = 0 \quad |\cdot 9$$
$$x^3 - 6x^2 - 3x + 36 = 0$$

Raten: $x_1 = 3$

$$\left(x^3 - 6x^2 - 3x + 36\right) : (x-3) = x^2 - 3x - 12$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^3 - 3x^2} \\ \quad -3x^2 - 3x \\ \quad \underline{-3x^2 + 9x} \\ \qquad -12x + 36 \\ \qquad \underline{-12x + 36} \\ \qquad\quad - \end{array}$$

$$x^2 - 3x - 12 = 0$$
$$x_{2/3} = \frac{3 \pm \sqrt{9+48}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{2} \approx \begin{cases} 5{,}27 \\ -2{,}27 \end{cases}$$

1.6 Der Graph $G_{f_1'}$ der Funktion f_1' ist eine Parabel. Berechnen Sie die Koordinaten ihres Scheitels. Zeichnen Sie den Graphen $G_{f_1'}$ für $-3 \le x \le 6$ in das vorhandene Koordinatensystem.

$$f_1'(x) = \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}x - 1$$
$$\left.\begin{array}{l} x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-\frac{2}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}} = 1 \\ y_S = f_1'(1) = -\tfrac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow S\left(1 \middle| -\tfrac{4}{3}\right)$$

1.7 Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Wendetangente von G_{f_1} und der y-Koordinate des Scheitels von $G_{f_1'}$ in Worten.

Die y-Koordinate des Scheitels entspricht der Steigung der Wendetangente.
Also: $y_S = f_1'(x_W)$

1.8 Berechnen Sie Maßzahl des Flächenstücks, das die Graphen G_{f_1} und $G_{f_1'}$ sowie die y-Achse im I. und IV. Quadranten einschließen.

$$A = \int_0^3 \left(f_1(x) - f_1'(x) \right) dx$$

$$A = \int_0^3 \left(\tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 - x + 3 - \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}x - 1 \right) \right) dx$$

$$A = \int_0^3 \left(\tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x + 4 \right) dx$$

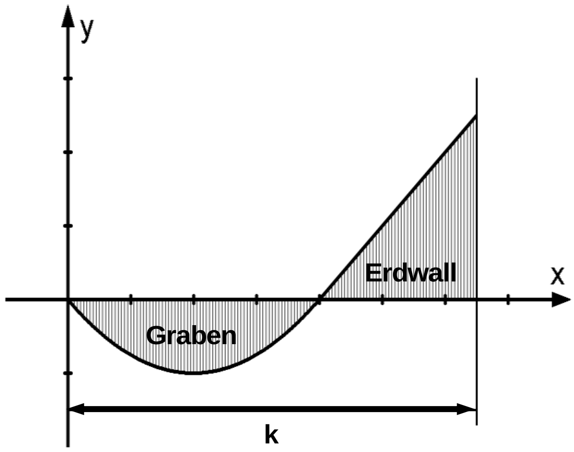
$$A = \left[\tfrac{1}{36}x^4 - \tfrac{2}{9}x^3 - \tfrac{1}{6}x^2 + 4x \right]_0^3$$

$$A = 6{,}75$$

2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt durch einen ausgehobenen Graben und einen aufgeschütteten Erdwall.
Der Graph G_g ist der Graph der abschnittsweise definierten Funktion

$$g: x \mapsto \begin{cases} \tfrac{1}{4}x^2 - x & \text{für} \quad 0 \le x \le 4 \\ x - 4 & \text{für} \quad 4 < x \le k \end{cases}$$

mit $k \in \mathbb{R}$ und $k > 4$



2.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Übergang vom Graben zum Erdwall stetig und „ohne Knick“ verläuft.

Stetigkeit:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} g(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(\tfrac{1}{4} \cdot (4-h)^2 - (4-h) \right) = 0 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} g(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left((4+h) - 4 \right) = 0 \\ g(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{g ist stetig an der} \\ \text{Stelle } x_0 = 4 \end{array}$$

Differenzierbarkeit:

$$g': x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 1 & \text{für} \quad x < 4 \\ 1 & \text{für} \quad x > 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(\tfrac{1}{2} \cdot (4-h) - 1 \right) = 1 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{g ist differenzierbar} \\ \text{an der Stelle } x_0 = 0 \\ \text{Graph verläuft "ohne Knick"} \end{array}$$

2.2 Stellen Sie die Maßzahl der Querschnittsfläche A(k) des Erdwalls in Abhängigkeit von k dar.
$\left(\text{Mögliches Ergebnis: } A(k) = \tfrac{1}{2}k^2 - 4k + 8 \right)$

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot h$$
$$A(k) = \tfrac{1}{2} \cdot (k-4) \cdot (k-4) = \tfrac{1}{2}\left(k^2 - 8k + 16\right) = \tfrac{1}{2}k^2 - 4k + 8$$

2.3 Der Aushub, der bei der Erstellung des Grabens anfällt, soll vollständig als Erdwall verwendet werden. Berechnen Sie k so, dass die Querschnittsfläche des Erdwalls genau so groß ist wie die Querschnittsfläche des Grabens.

$$A_{\text{Aushub}} = -\int_0^4 \left(\tfrac{1}{4}x^2 - x\right)dx = -\left[\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \tfrac{8}{3}$$
$$A(k) = \tfrac{8}{3}$$
$$\tfrac{1}{2}k^2 - 4k + 8 = \tfrac{8}{3}$$
$$\tfrac{1}{2}k^2 - 4k + \tfrac{16}{3} = 0$$
$$k_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4 \pm \sqrt{\tfrac{16}{3}} = 4 \pm \tfrac{4}{3}\sqrt{3} \approx \begin{cases} 6{,}31 & \text{da } k > 4 \\ (1{,}69) & \end{cases}$$