2002 A I

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto f_k(x)$; $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$

$$f_k(x) = \frac{2}{27}x^3 - 2x + k \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes von G_{f_k} (9 BE)

(Teilergebnisse: $x_T = 3; x_H = -3$)

1.2 Ermitteln Sie mit Hilfe der Extrempunkte aus Teilaufgabe 1.1 diejenigen Werte von k, für die die Funktion f_k eine, zwei bzw. drei Nullstellen hat. (6 BE)

2.1 Die Funktion f_5 $(k = 5)$ besitzt genau eine Nullstelle.

Zeigen Sie, dass sich diese Nullstelle zwischen $x_1 = -7$ und $x_2 = -6$ befindet.

Führen Sie für diese Nullstelle ausgehend vom Startwert $x_0 = -6{,}5$ zwei Schritte des Newtonverfahrens durch. Geben Sie auch die für die Berechnung notwendigen Teilergebnisse an.

Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. (8 BE)

2.2 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_5} im Bereich $-6{,}5 \le x \le 6{,}5$ unter Berücksichtigung vorhandener Ergebnisse und unter Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte. Verwenden Sie ein gesondertes DIN-A4-Blatt im Hochformat und legen Sie den Koordinatenursprung in die Blattmitte.

Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (5 BE)

3.0 Die Parabel G_p ist der Graph einer quadratischen Funktion $p : x \mapsto p(x); \mathbb{D}_p = \mathbb{R}$.

Diese Parabel geht durch den Hochpunkt des Graphen G_{f_5} und berührt G_{f_5} in dessen Tiefpunkt.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ und zeichnen Sie die Parabel G_p für $-3 \le x \le 9$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (8 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $p(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 3$)

3.2.0 Gegeben sind die linearen Funktionen g_m mit $g_m(x) = mx - 3m + 3$; $\mathbb{D}_{g_m} = \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$. Ihre Graphen sind die Geraden G_{g_m}.

3.2.1 Zeigen sie, dass die Parabel G_p von jeder der Geraden G_{g_m} in zwei Punkten geschnitten wird. (4 BE)

3.2.2 Bestimmen Sie für den Sonderfall $m = 1$ die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden G_{g_1} und der Parabel G_p.

Zeichnen Sie die Gerade G_{g_1} in das vorhandene Koordinatensystem ein und berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das diese Gerade und die Parabel G_p einschließen. (7 BE)

4.1 Betrachtet wird nun zusätzlich die Funktion f_{-4} $(k = -4)$. Begründen Sie kurz, wie der Graph $G_{f_{-4}}$ aus dem Graphen G_{f_5} hervorgeht. Zeichnen Sie den Graphen $G_{f_{-4}}$ im Bereich $-6{,}5 \le x \le 6{,}5$ in das vorhandene Koordinatensystem (Teilaufgabe 2.2) ein und geben Sie die Nullstellen der Funktion f_{-4} mit jeweiliger Vielfachheit an. (7 BE)

4.2 f_{-4} ist die Ableitungsfunktion einer Funktion F_{-4}. Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion F_{-4} echt monoton zu- bzw. abnimmt. Geben Sie die x-Koordinaten sämtlicher Punkte an, in denen der Graph $G_{F_{-4}}$ waagrechte Tangenten besitzt. Begründen Sie kurz, um welche Art Punkt es sich dabei jeweils handelt. (6 BE)