

2002 A II

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto f_a(x)$; $ID_{f_a} = \mathbb{R}$

$$f_a(x) = \frac{1}{8}(a-x) \cdot (x^2 + 4x + 4) \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

- 1.1 Ermitteln Sie das Intervall, in dem $f_a(x) \geq 0$ ist. (4 BE)

$$\begin{aligned} f_a(x) &\geq 0 \\ \frac{1}{8}(a-x) \cdot (x^2 + 4x + 4) &\geq 0 \\ \frac{1}{8}(a-x) \cdot (x+2)^2 &\geq 0 \quad | \cdot 8 \\ (a-x) \cdot (x+2)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Da $(x+2)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, muss somit $a-x \geq 0$ sein. Somit folgt: $x \leq a$
Für alle $x \in]-\infty; a]$ gilt somit $f_a(x) \geq 0$.

- 1.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Extremstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a (8 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $f'_a(x) = -\frac{1}{8} \cdot (3x^2 + (8-2a) \cdot x - 4a + 4)$.)

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \frac{1}{8}(a-x) \cdot (x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{8}(ax^2 + 4ax + 4a - x^3 - 4x^2 - 4x) \\ f'_a(x) &= \frac{1}{8}(-3x^2 + 2ax - 8x + 4a - 4) = \frac{1}{8}(-3x^2 + (2a-8)x + 4a - 4) = 0 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Extremstellen der Funktion f_a hängt von der Diskriminante ab!

$$D = (2a-8)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (4a-4)$$

$$D = 4a^2 - 32a + 64 + 48a - 48$$

$$D = 4a^2 + 16a + 16$$

$$D = (2a+4)^2 \geq 0$$

1. Fall: $D = (2a+4)^2 = 0 \Rightarrow a = -2$

Für $a = -2$ hat die Funktion $f'_a(x)$ eine doppelte Nullstelle \Rightarrow Monotonie der Funktion $f_a(x)$ ändert sich nicht $\Rightarrow G_{f_a}$ hat keine Extremstelle.

2. Fall: $D = (2a+4)^2 > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ hat die Funktion $f'_a(x)$ zwei einfache Nullstellen \Rightarrow Monotonie der Funktion $f_a(x)$ ändert sich $\Rightarrow G_{f_a}$ hat zwei Extremstellen.

- 1.3 Berechnen Sie den Wert von a so, dass der Graph G_{f_a} im Schnittpunkt mit der y -Achse die Steigung $m = 1,5$ besitzt. (2 BE)

Es muss gelten:

$$\begin{aligned} f_a'(0) &= 1,5 \\ \frac{1}{8}(-3 \cdot 0^2 + (2a - 8) \cdot 0 + 4a - 4) &= 1,5 \\ 4a - 4 &= 12 \\ 4a &= 16 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

- 2.0 Für die folgenden Teilaufgaben wird $a = 4$ gesetzt. Der zur Funktion f_4 gehörende Funktionsterm lässt sich in der Form $f_4(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x - 4) \cdot (x + 2)^2$ schreiben. (Beweis nicht erforderlich!)
- 2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_4 mit jeweiliger Vielfachheit an. (2 BE)

$$f_4(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x - 4) \cdot (x + 2)^2 = 0$$

$$x_1 = 4 \text{ einfache Nullstelle}$$

$$x_2 = -2 \text{ doppelte Nullstelle}$$

- 2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_{f_4} . (7 BE)

$$f_4'(x) = \frac{1}{8}(-3x^2 + (2 \cdot 4 - 8)x + 4 \cdot 4 - 4) = \frac{1}{8}(-3x^2 + 12)$$

$$f_4'(x) = 0$$

$$\frac{1}{8}(-3x^2 + 12) = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x_{\frac{1}{2}} = \pm 2$$

$$f_4''(x) = -\frac{3}{4}x$$

$$\left. \begin{aligned} f_4''(-2) &= -\frac{3}{4} \cdot (-2) = 1,5 > 0 \Rightarrow \text{lk} \\ f_4(-2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{TP}(-2|0)$$

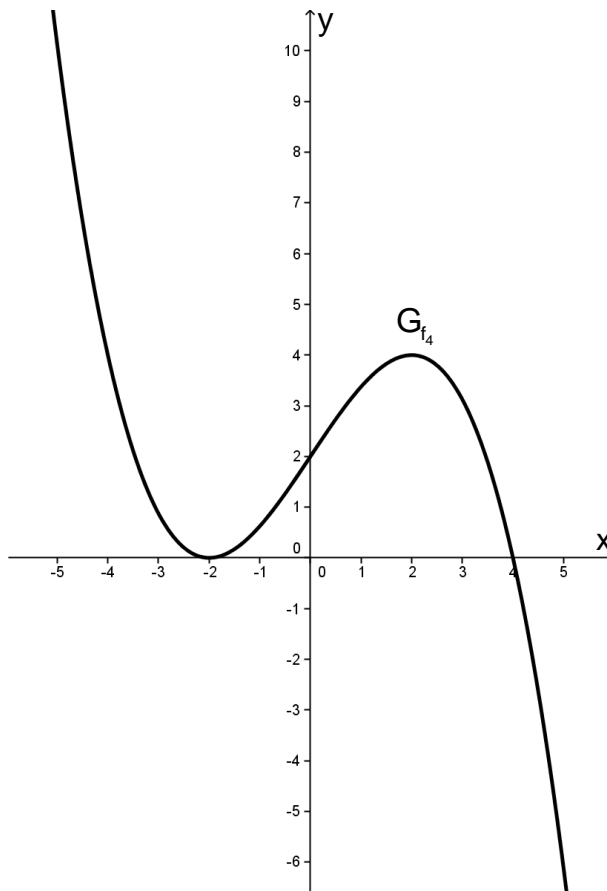
$$\left. \begin{aligned} f_4''(2) &= -\frac{3}{4} \cdot (2) = -1,5 < 0 \Rightarrow \text{rk} \\ f_4(2) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{HP}(2|4)$$

$$f_4''(x) = -\frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 0 \quad 1x \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel} \Rightarrow \text{Krümmung ändert sich} \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

$$f_4''(0) = 2 \Rightarrow \text{WP}(0|2)$$

- 2.3 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_4} im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ unter Berücksichtigung vorhandener Ergebnisse und unter Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte. Verwenden Sie ein gesondertes DIN-A4-Blatt im Hochformat und legen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in die Blattmitte. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (4 BE)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	10,13	4	0,88	0	0,63	2	3,38	4	3,13	0	-6,13



- 3.0 Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion $g: x \mapsto g(x)$, $\text{ID}_g = \mathbb{R}$

$$\text{mit } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(-x^3 + 12x + 16) & \text{für } x < 0 \\ qx^2 + rx + s & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \text{ mit } q, r, s \in \mathbb{R}$$

Der Graph dieser Funktion wird G_g genannt.

- 3.1 (Diese Aufgabenstellung wird nach aktuellem Lehrplan nicht mehr abgedeckt) Berechnen Sie q , r und s so, dass die Funktion g für $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar ist und der Graph G_g mit dem Graphen G_{f_4} (s. Aufgabe 2.3)

zusätzlich den Punkt $P(4|0)$ gemeinsam hat.
 (Ergebnis: $q = -0,5$; $r = 1,5$; $s = 2$.)

(8 BE)

Stetigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{8} \left(-(0-h)^3 + 12 \cdot (0-h) + 16 \right) \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(q \cdot (0+h)^2 + r \cdot (0+h) + s \right) = s \\ g(0) &= s \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = 2$$

Differenzierbarkeit:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(-3x^2 + 12) & \text{für } x < 0 \\ 2qx + r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{8} \left(-3 \cdot (0-h)^2 + 12 \right) \right) = 1,5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(2q \cdot (0+h) + r \right) = r \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = 1,5$$

Zusätzlich muss gelten:

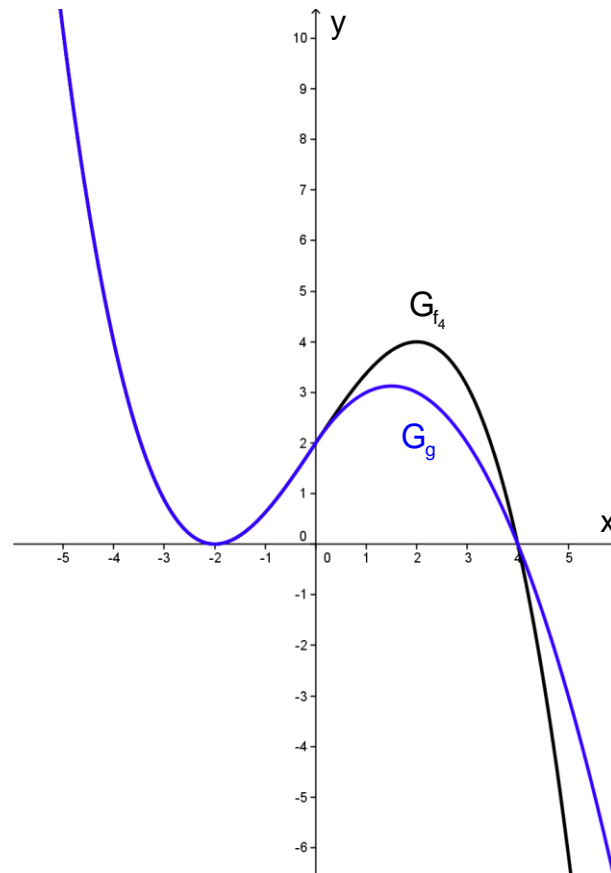
$$\begin{aligned} g(4) &= 0 \\ q \cdot 4^2 + 1,5 \cdot 4 + 2 &= 0 \\ 16q &= -8 \\ q &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(-x^3 + 12x + 16) & \text{für } x < 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 1,5x + 2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar und ihr Graph hat mit dem Graphen G_{f_4} den Punkt $P(4|0)$ gemeinsam.

- 3.2 Zeichnen Sie den Graphen G_g im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ farbig in das vorhandene Koordinatensystem ein. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Funktion g genau zwei Nullstellen besitzt. (7 BE)



Für $x < 0$ gilt:

Der Graph der Funktion g ist identisch mit dem Graph der Funktion f_4 . Daher hat der Graph G_g nur eine Nullstelle für $x < 0$.

Für $x \geq 0$ gilt:

Der Graph der Funktion g entspricht hier einer nach unten geöffneten Parabel mit dem Scheitel

$$\left. \begin{aligned} x_s &= -\frac{\frac{3}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2} \\ y_s &= g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + 2 = 3\frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S\left(\frac{3}{2} \mid 3\frac{1}{8}\right)$$

Da nun aber $g(0) = 2$ hat die Parabel links vom Scheitel keine Nullstelle.

Verbleibt dann die Nullstelle rechts vom Scheitel.

Folgerung: Der Graph der Funktion g hat somit genau zwei Nullstellen.

- 3.3 Der Graph G_g schließt mit der x -Achse ein im I. und II. Quadranten liegendes Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl dieses Flächenstücks. (6 BE)

$$A = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{8}(x^3 + 12x + 16) \right) dx + \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \right) dx$$

$$A = \left[\frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2 + 16x \right) \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 2x \right]_0^4$$

$$A = \left[\frac{1}{8} \cdot 0 - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 6 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot (-2) \right) \right] + \left[-\frac{1}{6} \cdot 4^3 + \frac{3}{4} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 0 \right]_0^4$$

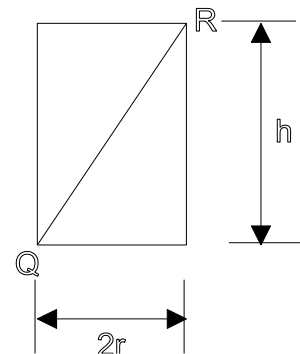
$$A = \left[\frac{1}{8} \cdot 0 - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 6 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot (-2) \right) \right] + \left[-\frac{1}{6} \cdot 4^3 + \frac{3}{4} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 0 \right]_0^4$$

$$A = \frac{3}{2} + \frac{28}{3}$$

$$A = 10 \frac{5}{6}$$

- 4.0 Bei zylinderförmigen Behältern mit Höhe h und Radius r (Seitenansicht s. nebenstehende Skizze) ist $\overline{QR} = 12$ dm konstant. (Einheiten bleiben unberücksichtigt.)

- 4.1 Stellen Sie die Maßzahl des Volumens $V(h)$ des Behälters in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge ID_V der zugehörigen Funktion V an.



(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi \cdot \left(-\frac{h^3}{4} + 36h \right)$.) (4 BE)

Für das Volumen eines Zylinders gilt:

$$V_z = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Nach Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck:

$$(2r)^2 + h^2 = 12^2$$

$$4r^2 + h^2 = 144$$

$$4r^2 = 144 - h^2$$

$$r^2 = 36 - \frac{1}{4}h^2$$

Somit folgt für das von h abhängige Volumen:

$$V(h) = r^2 \cdot \pi \cdot h = \left(36 - \frac{1}{4}h^2 \right) \cdot \pi \cdot h = -\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot h^3 + 36 \cdot \pi \cdot h$$

Für die Definitionsmenge gilt:

Die kleinste Höhe ist natürlich $h = 0$. Die größte Höhe würde man erhalten, wenn $2r = 0$, dann ist aber $h = \overline{QR} = 12$

Also: $ID_V = [0; 12]$

Bemerkung: Manche stören sich aber an den geschlossenen Klammer und deswegen ist es an manchen Schulen auch oft der Fall, dass die

Definitionsmenge offene Klammern hat, also: $ID_V =]0;12[$.

- 4.2 Bestimmen Sie h ($h \in ID_V$) so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Bestimmen Sie für diesen Fall auch den Radius r des Behälters sowie das maximale Volumen V_{\max} . (8 BE)

$$V(h) = -\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot h^3 + 36 \cdot \pi \cdot h$$

$$V'(h) = -\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot h^2 + 36 \cdot \pi = 0$$

$$\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot h^2 = 36 \cdot \pi$$

$$h^2 = 48$$

$$h_1 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \in ID_V$$

$$h_2 = -\sqrt{48} = -4\sqrt{3} \notin ID_V$$

$$V''(h) = -\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot h$$

$$V''(h) = -\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 4\sqrt{3} < 0 \quad \text{rk}$$

$$V(0) = 0$$

$$V(4\sqrt{3}) = -\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{3})^3 + 36 \cdot \pi \cdot 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3} \cdot \pi$$

$$V(12) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} V(0) = 0 \\ V(4\sqrt{3}) = 96\sqrt{3} \cdot \pi \\ V(12) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow V_{\max} = 96\sqrt{3} \cdot \pi$$

$$\text{Es gilt: } r^2 = 36 - \frac{1}{4} h^2$$

$$r^2 = 36 - \frac{1}{4} (\sqrt{48})^2$$

$$r^2 = 24$$

$$r_1 = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad (r_2 = -\sqrt{24})$$