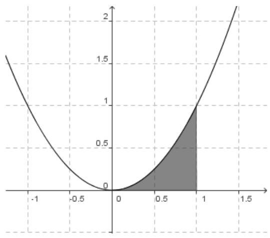
§ 34 Vertiefung des Integralbegriffs

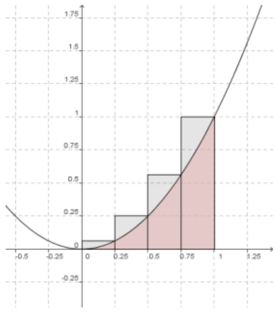
Die Wurzeln der Flächenberechnung liegen in der Antike. Archimedes von Syrakus (287 v.Chr. – 212 v. Chr.) beschäftigte sich sehr ausführlich mit der Flächenberechnung des Kreises. Er versuchte dabei den Kreis durch ein regelmäßiges 96-Eck anzunähern (Exhaustionsmethode) und fand für die Kreiszahl π folgende Abschätzung:

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{10}{70}$$



Es war auch Archimedes, der als erster versuchte den Flächeninhalt zu berechnen, den der Graph der Parabel $f(x) = x^2$ mit der x-Achse zwischen $x = 0$ und $x = 1$ einschließt.
Um seine Versuche praktisch zu überprüfen zeichnete er die entsprechende Fläche auf dünne Tafeln (z.B. aus Holz, mehrlagigem Papyrus oder vielleicht auch Ton) auf und schnitt sie anschließend aus. Danach verglich er das Gewicht der ausgeschnittenen Flächenstücke. Dadurch konnte er falsche Vorgehensweisen durch Messung des Gewichts bereits von vorneherein ausschließen. Mit seinen Ideen aber legte Archimedes den Grundstein für die Integralrechnung, die aber erst Ende des 17. Jahrhunderts durch Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton seine Anfänge erlebte.

34.1 Die Streifenmethode



Archimedes wollte ja den Inhalt der Fläche unter der Normalparabel zwischen 0 und 1 berechnen. Dazu zerschnitt er die Fläche in Streifen gleicher Breite $\left(\Delta x = \frac{1}{4}\right)$. Als Höhe dieser Rechtecke wählte er den maximalen Funktionswert des entsprechenden Teilintervalls. Die Parabel verläuft also durch die rechte obere Ecke des so entstandenen Rechtecks. Er war nun der Meinung, dass die Fläche seiner Streifen eine obere Grenze für die gesuchte Fläche darstellt.
Die Summe der Inhalte der Streifen lässt sich recht einfach berechnen. Wir nennen diese Summe einfach Obersumme $\overline{S}_4$, für diese gilt:

$$\overline{S}_4 = \tfrac{1}{4} \cdot f\left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4} \cdot f\left(\tfrac{2}{4}\right) + \tfrac{1}{4} \cdot f\left(\tfrac{3}{4}\right) + \tfrac{1}{4} \cdot f\left(\tfrac{4}{4}\right)$$

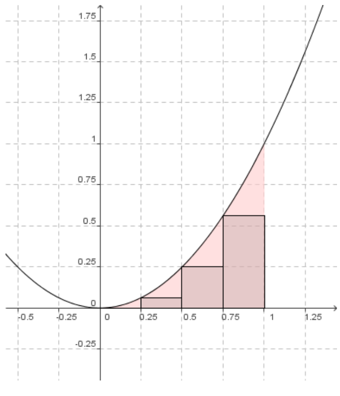
$$\overline{S}_4 = \tfrac{1}{4} \cdot \left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{4}\right)^2\right)$$

$$\overline{S}_4 = \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1^2}{4^2} + \tfrac{2^2}{4^2} + \tfrac{3^2}{4^2} + \tfrac{4^2}{4^2}\right)$$

$$\overline{S}_4 = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{16} \cdot \left(1^1 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)$$

$$\overline{S}_4 = \tfrac{1}{64} \cdot 30$$

$$\overline{S}_4 = \tfrac{15}{32} \approx 0,47$$



Um eine Abschätzung nach unten zu erhalten schnitt er wiederum Streifen mit gleicher Breite $\left(\Delta x = \frac{1}{4}\right)$ aus. Als Höhe dieser Rechtecke wählte er den minimalen Funktionswert des entsprechenden Teilintervalls. Die Parabel verläuft also durch die linke obere Ecke des so entstandenen Rechtecks.
Auch diese Summe der Inhalte der Streifen lässt sich recht einfach berechnen. Wir nennen diese Summe einfach Untersumme $\underline{S}_4$, für diese gilt:

$$\underline{S}_4 = \tfrac{1}{4}\cdot f\left(\tfrac{0}{4}\right) + \tfrac{1}{4}\cdot f\left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4}\cdot f\left(\tfrac{2}{4}\right) + \tfrac{1}{4}\cdot f\left(\tfrac{3}{4}\right)$$
$$\underline{S}_4 = \tfrac{1}{4}\cdot\left(\left(\tfrac{0}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2\right)$$
$$\underline{S}_4 = \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{0^2}{4^2} + \tfrac{1^2}{4^2} + \tfrac{2^2}{4^2} + \tfrac{3^2}{4^2}\right)$$
$$\underline{S}_4 = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{16}\cdot\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2\right)$$
$$\underline{S}_4 = \tfrac{1}{64}\cdot 14$$
$$\underline{S}_4 = \tfrac{7}{32} \approx 0,22$$

Wählen Sie die Streifenbreite nun $\Delta x = \frac{1}{8}$ und führen sie obige Berechnungen für die Obersumme $\overline{S}_8$ und die Untersumme $\underline{S}_8$ selbstständig durch.
Man erhält: $\overline{S}_8 = \frac{51}{128}$ und $\underline{S}_8 = \frac{35}{128}$

Archimedes hat die Formeln für die Berechnung der Ober- und Untersumme sogar allgemein für eine Streifenbreite von $\Delta x = \frac{1}{n}$ angegeben.
Für die Obersumme gilt:

$$\overline{S}_n = \tfrac{1}{n}\cdot f\left(\tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{n}\cdot f\left(\tfrac{2}{n}\right) + \ldots + \tfrac{1}{n}\cdot f\left(\tfrac{n-1}{n}\right) + \tfrac{1}{n}\cdot f\left(\tfrac{n}{n}\right)$$
$$\overline{S}_n = \tfrac{1}{n}\cdot\left(\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\tfrac{n}{n}\right)^2\right)$$
$$\overline{S}_n = \tfrac{1}{n^3}\cdot\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right)$$
$$\overline{S}_n = \tfrac{1}{n^3}\cdot\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\overline{S}_n = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$
$$\overline{S}_n = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{n+1}{n}\cdot\tfrac{2n+1}{n}$$
$$\overline{S}_n = \tfrac{1}{6}\cdot\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\tfrac{1}{n}\right)$$

Die Tatsache, dass $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ergibt lässt sich der Formelsammlung entnehmen.

Diese Beziehung könnte man aber auch mittels vollständiger Induktion beweisen.

$n = 0$: $0^2 = \frac{0\cdot(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} \Rightarrow 0 = 0$ (w)

$n = 1$: $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \Rightarrow 1 = 1$ (w)

Jetzt der Beweis von $n \to n+1$:
Da geht man davon aus, dass obige Formel für n gilt, also $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Dann berechnet man:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \tfrac{6(n+1)^2}{6} = \tfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$
$$= \tfrac{(n+1)\cdot(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \tfrac{(n+1)\cdot(2n^2+n+6n+6)}{6} = \tfrac{(n+1)\cdot(2n^2+7n+6)}{6} = \tfrac{(n+1)\cdot((n+2)\cdot(2n+3))}{6} = \tfrac{(n+1)\cdot((n+1+1)\cdot(2n+2+1))}{6} =$$
$$= \tfrac{(n+1)\cdot(((n+1)+1)\cdot(2(n+1)+1))}{6} \qquad \square$$

Und für die Untersumme gilt:

$$\underline{S}_n = \tfrac{1}{n}\cdot f\left(\tfrac{0}{n}\right) + \tfrac{1}{n}\cdot f\left(\tfrac{1}{n}\right) + \ldots + \tfrac{1}{n}\cdot f\left(\tfrac{n-2}{n}\right) + \tfrac{1}{n}\cdot f\left(\tfrac{n-1}{n}\right)$$

$$\underline{S}_n = \tfrac{1}{n}\cdot\left(\left(\tfrac{0}{n}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{n-2}{n}\right)^2 + \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$$

$$\underline{S}_n = \tfrac{1}{n^3}\cdot\left(0^2 + 1^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2\right)$$

$$\underline{S}_n = \tfrac{1}{n^3}\cdot\left(1^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 - n^2\right)$$

$$\underline{S}_n = \tfrac{1}{n^3}\cdot\left(\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right)$$

$$\underline{S}_n = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2} - \tfrac{1}{n}$$

$$\underline{S}_n = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{n+1}{n}\cdot\tfrac{2n+1}{n} - \tfrac{1}{n}$$

$$\underline{S}_n = \tfrac{1}{6}\cdot\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\tfrac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{n}$$

Für die Untersumme gilt sogar: $\underline{S}_n = \overline{S}_n - \tfrac{1}{n}$

Leider war Archimedes die Grenzwertrechnung noch nicht bekannt.
Lässt man nun die Anzahl der Streifen n gegen Unendlich gehen $(n \to \infty)$ so wird die Streifenbreite immer kleiner. Die krummlinige Kurve wird dann durch unendlich viele kleine Streifen mit verschwindender Breite angenähert.
Es gilt dann für die Ober- und Untersumme:

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{6}\cdot\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\tfrac{1}{n}\right)\right) = \tfrac{1}{6}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(2+\tfrac{1}{n}\right)}_{=2} = \tfrac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}_n = \lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_n - \tfrac{1}{n}\right) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n}_{=\frac{1}{3}} - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}}_{=0} = \tfrac{1}{3}$$

Archimedes konnte zwar für n sehr große Zahlen einsetzen, erhielt aber rein rechnerisch immer nur eine Näherung.
Wir können aber nun sagen, dass die gesuchte Fläche den Wert $\tfrac{1}{3}$ hat.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie nach obigem Schema die Fläche, die der Graph der Funktion f zwischen a und b einschließt. Ermitteln Sie zunächst eine allgemeine Formel und überprüfen Sie anschließend ihr Ergebnis!
   a) $f(x) = x^2$ $\quad a = 0$ und $b = 2$ $\quad (b > a)$
   b) $f(x) = x$ $\quad$ a und b $\quad (b > a)$
   c) $f(x) = 2x^2$ $\quad a = 0$ und b $\quad (b > a)$
   d) $f(x) = 2x^2 + 1$ $\quad a = 0$ und b $\quad (b > a)$

Hilfreich sind folgende Schreibweisen und Beziehungen:

$$1+2+3+...+n=\sum_{k=1}^{n}k=\tfrac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\tfrac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\tfrac{1}{4}\cdot n^2\cdot(n+1)^2$$

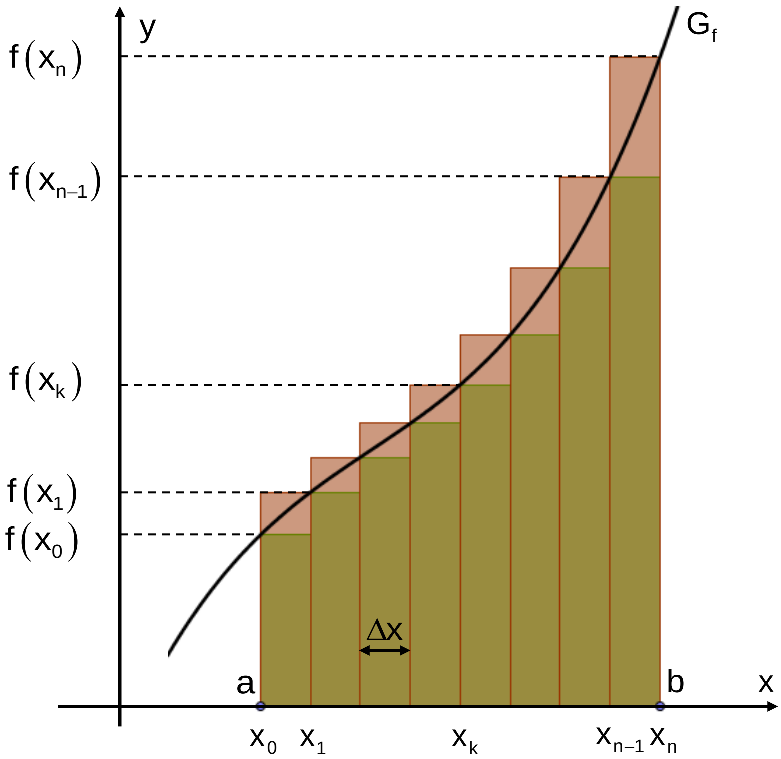
$$1^4+2^4+3^4+...+n^4=\sum_{k=1}^{n}k^4=\tfrac{1}{30}\cdot n\cdot(6n^4+15n^3+10n^2-1)$$

Dieses Streifen-Verfahren zur Berechnung von Flächeninhalten ist zwar aufwendiger als das Verfahren mit der Flächenfunktion (Stammfunktion), findet aber immer dann noch Anwendung, wenn sich zu einer Funktion keine Stammfunktion finden lässt. Man spricht dann von numerischer Integration.

34.2 Das bestimmte Integral

Wollen wir nun obiges Verfahren etwas verallgemeinern und die Fläche berechnen, die der Graph der Funktion $f(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$ mit der x-Achse einschließt.

Dazu teilen wir zunächst das Intervall $[a;b]$ in n gleich lange Stücke mit der Breite $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$. Für die gesuchte Fläche A gilt dann folgende Abschätzung:



$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n < A < \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x\right) < A < \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x\right) \qquad \left| -\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x\right.$$

$$0 < A - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x\right) < \lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)\cdot\Delta x - f(x_0)\cdot\Delta x\right)$$

$$0 < A - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x\right) < \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\left(f(b)-f(a)\right)\cdot\tfrac{b-a}{n}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad A - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n$$

Analog kann man zeigen, dass auch gilt:

$$A = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$$

Dies veranlasst uns zu folgender Definition:
Sei f eine im Intervall $[a;b]$ stetige Funktion. Die Fläche, die der Graph der Funktion f zwischen $x = a$ und $x = b$ mit der x-Achse einschließt bezeichnet man dann als ***bestimmtes Integral*** der Funktion f über $[a;b]$ und schreibt:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dies ist der gemeinsame Grenzwert von Ober- und Untersumme.
Man nennt $f(x)$ den *Integranden*, f die *Integrandenfunktion*, x die *Integrationsvariable*, $[a;b]$ das *Integrationsintervall*, a die untere und b die obere *Integrationsgrenze*.

Die Zahl $\int_a^b f(x)\,dx$ ist aus zwei Rechenprozessen entstanden, nämlich durch Summation und einen anschließenden Grenzprozess. Nach dem Vorschlag von Leibniz wird dies dadurch zum Ausdruck gebracht, dass an Stelle des $\sum$–Zeichens das stilisierte, langgezogene S $\left(\int\right)$, statt des Differenzzeichens Δx das Zeichen dx geschrieben wird.

Der Wert des bestimmten Integrals hängt nur von der Integrandenfunktion f und dem Integrationsintervall $[a;b]$ ab, nicht jedoch von der Bezeichnung der Integrationsvariablen.
So liefern also folgende Schreibweisen stets denselben Zahlenwert:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(y)\,dy = \ldots$$

Bemerkung: Bei obiger Herleitung sind wir von einer stetigen, nicht negativen und monoton wachsenden Funktion f ausgegangen. Das diente nur der Anschauung und sollte den Rechenaufwand in einem gewissen überschaubaren Rahmen halten.

Letztendlich aber gilt obige Beziehung für <u>*alle stetigen Funktionen*</u> f.

34.3 Eigenschaften des bestimmten Integrals

<u>*34.3.1 Umkehrung der Integrationsrichtung*</u>

Vertauscht man die Integrationsgrenzen a und b, so erhält man:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

Beweis:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \frac{b-a}{n}\right) = -\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \frac{a-b}{n}\right) = -\int_b^a f(x)\,dx$$

<u>*34.3.2 Oberer gleich unterer Integrationsgrenze*</u>

Stimmt die obere mit der unteren Integrationsgrenze überein, dann gilt:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Beweis:

$$\int_a^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \frac{a-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot 0\right) = 0$$

<u>*34.3.3 Konstanter Faktor im Integranden*</u>

Befindet sich im Integral ein konstanter Faktor $(c \in \mathbb{R})$, so lässt sich dieser aus dem Intergral herausziehen. Es gilt:

$$\boxed{\int_a^b \left(c\cdot f(x)\right)dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx}$$

Beweis:

$$\int_a^b \left(c\cdot f(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c\cdot f(x_k)\cdot \Delta x\right) = c\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \Delta x\right) = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

<u>*34.3.4 Summe im Integranden*</u>

Ist die Integrandenfunktion eine Summe (Differenz) zweier Funktion f und g, dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx}$$

Beweis:

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_k)+g(x_k)\right)\cdot\Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)\cdot\Delta x\right)$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

34.3.5 <u>Additivitätseigenschaft</u>

Ist die Funktion f im Intervall J stetig und sind $a, b, c \in J$, dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$$

Beweis:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x_n\right) + \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)\cdot\Delta x_m\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x_k\right) + \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=n}^{n+m-1} f(x_i)\cdot\Delta x_i\right)$$

$$= \lim_{n+m\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n+m-1} f(x_k)\cdot\Delta x\right)$$

$$= \int_a^c f(x)dx$$

für ein geeignetes m gilt nämlich $\Delta x_n = \Delta x_m$.

34.4 Die Integralfunktion

Sei f eine im Intervall J stetige Funktion. Der Zahlenwert des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)dx$$

hängt natürlich von der Wahl der Integrationsgrenzen $a, b \in J$ ab.

Wir wollen nun Integrale mit der festen unteren Grenze a und der variablen oberen Grenze $x \in J$ betrachten. Um Verwechslungen mit der Integrationsvariablen zu vermeiden, wählen wir hierfür einen anderen Buchstaben, nämlich t. Der Wert des Integrals ist von der Integrationsvariablen völlig unabhängig, wir erhalten also:

$$\int_a^x f(t)dt$$

Da zu jeder oberen Grenze $x \in J$ ein eindeutiger Integralwert gehört, kann dieser Term als Funktionsterm $F_a(x)$ einer im Integrationsintervall J definierten Funktion F_a aufgefasst werden.

Definition:
Ist f eine im Intervall J stetige Funktion. Dann nennt man die Funktion

$$F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{mit } a \in J$$

eine *Integralfunktion* von f. Sie ist ebenfalls in J definiert.

Der Index a steht dabei für den Wert der unteren Grenze.
Für einen anderen Wert der unteren Grenze erhält man dann natürlich eine etwas andere Integralfunktion!

Bemerkung:
Es gilt:

$$F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Somit ist die untere Integrationsgrenze für jede Integralfunktion F von f eine Nullstelle.

Nun gilt ja:

$$\int_0^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$F_0(a) + F_a(x) = F_0(x)$$

$$F_a(x) = F_0(x) - \underbrace{F_0(a)}_{=\text{konst.}}$$

$$\Rightarrow F_a(x) = F_0(x) + c$$

Aus der letzten Zeile folgt, dass sich zwei verschiedene Integralfunktionen lediglich durch eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ voneinander unterscheiden.
Bildet man die Ableitung dieser beiden Integralfunktionen, so folgt:

$$\left(F_a(x)\right)' = \left(F_0(x) + c\right)'$$

$$F_a'(x) = F_0'(x)$$

Wir werden später noch zeigen, dass sogar gilt:

$$F_a'(x) = F_0'(x) = f(x)$$

Definition:
Eine differenzierbare Funktion F heißt *Stammfunktion* zu einer Funktion f im gemeinsamen Definitionsbereich $\mathbb{D}$, wenn dort gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Die Menge aller Stammfunktionen F einer Funktion f nennt man das sogenannte *unbestimmte Integral*

$$\int f(x)\,dx$$

(Hier werden keine Integrationsgrenzen angegeben!)
Dann gilt:

$$\int f(x)\,dx = F_0(x) + c$$

mit irgendeiner Stammfunktion $F_0(x)$ und $c \in \mathbb{R}$.

Aus obiger Beziehung

$$\int_a^x f(t)\,dt = F_a(x) = F_0(x) - F_0(a)$$

folgt für $x = b$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_0(b) - F_0(a)$$

Definition:
Die Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ einschließt nennt man das *bestimmte Integral* von f über $[a; b]$. Es gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

mit irgendeiner Stammfunktion F von f.

Das haben wir ja in der 12. Klasse über die Flächenfunktion hergeleitet und auch schon ausgiebig geübt.

34.5 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Jede Integralfunktion F einer stetigen Funktion f ist differenzierbar. Ihrer Ableitung ist die Integrandenfunktion f.
Ist also:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

dann folgt:

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

Beweis:

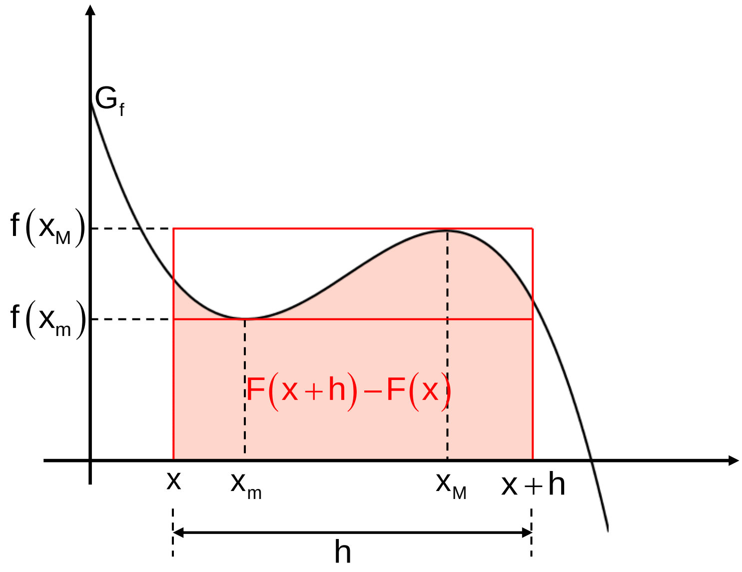
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Um das $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ zu bestimmen benötigt man zur Abschätzung folgende Grafik.



Nach dem Extremwertsatz nimmt die Funktion f im Intervall $[x;x+h]$ an der Stelle x_M einen maximalen und an der Stelle x_m einen minimalen Funktionswert an.
Somit gelangt man recht einfach zu folgender Abschätzung:

$$h \cdot f(x_m) < \int_x^{x+h} f(t)dt < h \cdot f(x_M)$$

und nach Division mit $h>0$

$$f(x_m) < \tfrac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt < f(x_M)$$

Lässt man nun $h \to 0$ gehen

$$\lim_{h\to 0} f(x_m) < \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt < \lim_{h\to 0} f(x_M)$$

dann muss gezwungener maßen $x_m \to x$ und $x_M \to x$ gehen. Also

$$f(x) < \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt < f(x)$$

und dann

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)$$

Und somit folgt letztendlich

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)$$ □

Hieraus folgen letztendlich zwei doch recht wichtige Erkenntnisse:

- Jede Integralfunktion F einer stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f.
  Umgekehrt muss aber nicht jede Stammfunktion auch eine Integralfunktion sein.
  Das zeigt folgendes Beispiel.
  $F(x) = x^2 + 1$ ist zwar Stammfunktion von $f(x) = 2x$, aber keine Integralfunktion von f, weil F keine Nullstelle hat.
- Die Differentiation ist die Umkehrung der Integration.

Aufgaben:

2. Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen folgender Integralfunktionen
   a) $A(x)=\int_0^x t\,dt$
   b) $B(x)=\int_1^x t\,dt$
   c) $C(x)=\int_0^x \left(t^2-t+1\right)dt$
   d) $D(x)=\int_0^x \sin(t)\,dt$
   e) $E(x)=\int_0^x \sqrt{t}\,dt$
   f) $F(x)=\int_{1054}^x \left(t^3-1\right)\cos(t)\,dt$
3. Geben Sie zur Integrandenfunktion $f: x \mapsto x^2;\ \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ eine Integralfunktion an, die
   a) an der Stelle 1 den Funktionswert 0
   b) an der Stelle a den Funktionswert b hat.
4. Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt:
   a) $\int_0^a \sin(x)\,dx=0$
   b) $\int_0^a \cos(x)\,dx=0$
   c) $\int_{-a}^a \sin(x)\,dx=0$
   d) $\int_{-a}^a \cos(x)\,dx=0$
   e) $\int_0^a \cos(x)\,dx<0$
   f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^a \sin(x)\,dx=0$
5. Beschreiben Sie verschiedene Fälle, in denen $\int_a^b f(x)\,dx=0$
6. Beschreiben Sie verschiedene Fälle, in denen $\int_a^b f(x)\,dx<0$
7. Bestimmen Sie zur Funktion $f(x)$ diejenige Stammfunktion F, deren Graph durch den angegebenen Punkt P geht:
   a) $f(x)=1-\sin(x)$ $\quad A(0|2)$
   b) $f(x)=\sin(x)+\cos(x)$ $\quad B(\pi|-3)$
   c) $f(x)=x+\sin(x)$ $\quad C(0|-1)$
   d) $f(x)=2x-\cos(x)$ $\quad D\left(\pi|\pi^2\right)$

8. Gegeben ist die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{für} \quad x<0\\ x & \text{für} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

9. Für die Funktion f gelte: $\int_{1}^{2} f(x)\,dx=\int_{1}^{3} f(x)\,dx$

Skizzieren Sie einen möglichen Graphen G_f.

10. Was kann man über die Funktion f aussagen, wenn man weiß

a) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx>0$ b) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx=0$ c) $\int_{1}^{0} f(x)\,dx>0$

11. Es gilt: $\int_{a}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)dx=0$, wobei $f(x)\neq g(x)$. Wie ist das möglich? Geben Sie ein Beispiel an.

12. Differenzieren Sie folgende Funktionen

a) $F: x\mapsto \int_{a}^{x}\left(t^2-1\right)dt$

b) $F: x\mapsto \int_{x}^{a}\left(t^2-1\right)dt$

c) $F: x\mapsto \int_{a}^{-x}\left(t^2-1\right)dt$

d) $F: x\mapsto \int_{x}^{-x}\left(t^2-1\right)dt$

e) $F: x\mapsto \int_{a}^{x^2}\left(t^2-1\right)dt$

f) $F: x\mapsto \int_{a}^{x}\left(t^2-x\right)dt$

13. Gegeben sind die Funktionen

$F_0: x\mapsto \int_{0}^{x}\left(1-t^2\right)dt$; $\mathbb{D}_{F_0}=\mathbb{R}$ und $F_a: x\mapsto \int_{a}^{x}\left(1-t^2\right)dt$; $\mathbb{D}_{F_a}=\mathbb{R}$

Wie unterscheiden sich F_0 und F_a? Für welche $a\in\mathbb{R}$ gilt: $F_0=F_a$?

14. Bestimmen Sie $k\in\mathbb{R}$ so, dass folgende Gleichungen richtig sind, und skizzieren Sie den gegebenen Sachverhalt.

a) $\int_{0}^{k} x\,dx=1$ b) $\int_{0}^{k}\left(x^2+1\right)dx=\frac{4}{3}$ c) $\int_{0}^{k}\sin(x)\,dx=1$

15. Begründen Sie, warum es kein $k\in\mathbb{R}^+$ gibt, das folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_{0}^{k}\left(x^2+1\right)dx=-1$$

16. Gegeben sind die Funktionsterme $f(x)$. Bestimmen Sie zunächst die Schar der Integralfunktionen $F_k(x)=\int\limits_k^x f(t)\,dt$ sowie die Schar der Stammfunktionen $F_c(x)$.
Untersuchen Sie, für welche $c\in\mathbb{R}$ die Stammfunktion $F_c(x)$ zugleich auch eine Integralfunktion $F_k(x)$ ist.
a) $f(x)=2$ b) $f(x)=2x$ c) $f(x)=2x+2$
d) $f(x)=1-3x$ e) $f(x)=4x^3-4x$ f) $f(x)=6x^3+12x$
g) $f(x)=\sin(x)$ h) $f(x)=x+\sin(x)$
17. Für welche x hat die Funktion
$$F: x\mapsto\int\limits_0^x(\sin(t)-\cos(t))\,dt$$
in $[0;2\pi[$ Extremwerte? Wie lautet der Funktionsterm $F(x)$ ohne Integralzeichen?
18. Ermitteln Sie folgende Grenzwerte
a) $\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_1^a\frac{2}{x^2}\,dx$ b) $\lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^0 e^x\,dx$
19. Schätzen Sie mit Hilfe der Streifenmethode folgenden Flächeninhalt ab
$$\lim_{a\to 0}\int\limits_a^{\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$
Verwenden Sie zunächst nur $n=2$ Rechtecke und steigern Sie dann die Anzahl der Rechtecke. Vielleicht lässt sich das Problem auch in Excel lösen!?
(Hinweis: Diskutieren Sie zuerst die Integrandenfunktion und untersuchen Sie diese ob sie an der Stelle 0 stetig fortsetzbar ist.)

34.6 Uneigentliche Integrale 1. Art

In der Physik hat man in der 12. Klasse die Arbeit berechnet, die nötig ist um einen Körper der Masse m von der Erdoberfläche ins Unendliche zu befördern.
Dabei hatte man folgendes Integral zu berechnen.
$$W_\infty=\int\limits_{r_E}^{\infty}F_{Gr}(r)\,dr=\int\limits_{r_E}^{\infty}\frac{G\cdot m_E\cdot m}{r^2}\,dr=G\cdot m_E\cdot m\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_E}^{\infty}=G\cdot m_E\cdot m\cdot\left(-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{r_E}\right)=\frac{G\cdot m_E\cdot m}{r_E}$$
Daraus lies sich dann problemlos die Fluchtgeschwindigkeit ermitteln.
$$E_{kin}=W_\infty$$
$$\tfrac{1}{2}m\cdot v_{Flucht}^2=\frac{G\cdot m_E\cdot m}{r_E}$$
$$v_{Flucht}=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot m_E}{r_E}}$$
Dabei hatte man ein Integral zu berechnen mit der oberen Integrationsgrenze ∞.

Definition:
Ist $f: x \mapsto f(x)$ in $[a;\infty[$ integrierbar, so nennt man Integrale der Form

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

<u>*uneigentliche Integrale 1. Art*</u> (falls die Grenzwerte existieren)

Das sind also Integrale, bei denen die obere oder untere Grenze ∞ bzw. $-\infty$ ist.

Beispiele:

1.) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] = 1$

2.) $\int_{-\infty}^1 e^x dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^1 e^x dx = \lim_{b\to-\infty}\left[e^x\right]_b^1 = \lim_{b\to-\infty}\left[e-e^b\right] = e$

3.) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x)\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(b)-\ln(1)\right] \to \infty$

Da in diesem Beispiel kein Grenzwert existiert handelt es sich bei diesem Integral um <u>kein</u> uneigentliches Integral.

Mit obiger Definition lässt sich nun der Begriff des Flächeninhalts auf Flächenstücke, die sich Unendliche erstrecken erweitern. Der Grenzwert des entsprechenden uneigentlichen Integrals kann (falls er existiert) als die Maßzahl des Inhalts eines derartigen unbegrenzten Flächenstücks definiert werden.

Aufgaben:

20. Untersuchen Sie, für welche $k \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_a^\infty \frac{1}{x^k}\,dx$ existiert. Dabei ist $a \in \mathbb{R}^+$. Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch!
21. Untersuchen Sie, ob folgende Integrale existieren und geben Sie gegebenenfalls ihre Werte an!

a) $\int_2^\infty \frac{2}{x^2}\,dx$	b) $\int_{-1}^{-\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$	c) $\int_2^\infty \frac{2}{x^4}\,dx$
d) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$	e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$	f) $\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3}\,dx$
g) $\int_1^\infty \frac{1-x-x^2}{x^3}\,dx$	h) $\int_2^\infty \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\,dx$	i) $\int_1^\infty \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx$
j) $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$	k) $\int_1^\infty e^{-2x}\,dx$	l) $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$

22. Eine Berechnung der folgenden Integrale ist nicht möglich, da wir (jetzt und auch später) keine Stammfunktion zur Integrandenfunktion angeben können. Trotzdem lässt sich zeigen, dass die Integrale existieren. Wie?

a) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$ b) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}+\arctan(x)}\,dx$

(Anleitung: Ersetzen Sie jeweils den Integranden durch einen im gesamten Integrationsbereich größeren Integranden, für den das Integral existiert und wenden Sie die Monotonieeigenschaft des bestimmten Integrals an.)

23. Ein Widerstand der Größe R, eine Spule der Induktivität L und eine Gleichspannungsquelle der Spannung U_0 sind parallel geschaltet. Wird die Spannungsquelle abgeschaltet, bricht der Strom in dem die Spule und den Widerstand umfassenden Stromkreis nicht sofort zusammen, sondern nimmt zum Zeitpunkt $t=0$ des Ausschaltens an nach folgendem Gesetz ab:

$$J(t)=J_0\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

Berechnen Sie, welche Stromarbeit also nach dem Abschalten noch am Widerstand geleistet wird. Wie ist das Ergebnis physikalisch zu deuten?
(Hinweis: Arbeitsintegral für die Stromarbeit!)

24. Entscheiden Sie, ob das uneigentliche Integrale $\int_e^{\infty}\frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ existiert und berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert.

34.7 Uneigentliche Integrale 2. Art

Definition:
Ist $f:x\mapsto f(x)$ in $]a;b]$ integrierbar und am linken Rand des Intervalls nicht beschränkt, so nennt man Integrale der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\overset{>}{\to}a}\int_t^b f(x)\,dx$$

<u>*uneigentliche Integrale 2. Art*</u> (falls die Grenzwerte existieren)
Ist $f:x\mapsto f(x)$ in $[a;b[$ integrierbar und am rechten Rand des Intervalls nicht beschränkt, so nennt man Integrale der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\overset{<}{\to}b}\int_a^t f(x)\,dx$$

ebenfalls <u>*uneigentliche Integrale 2. Art*</u> (falls die Grenzwerte existieren)

Auch in diesen beiden Fällen kann der Integralwert als Maßzahl einer sich ins Unendliche erstreckenden Fläche definiert werden.

Beispiele:

1.) $$\int_0^{16}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\int_t^{16}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\left[\tfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}\right]_t^{16}=\tfrac{4}{3}\cdot\lim_{t\overset{>}{\to}0}\left[\sqrt[4]{16^3}-\sqrt[4]{t^3}\right]=\tfrac{4}{3}\cdot 8=10\tfrac{2}{3}$$

2.) $$\int_0^b\frac{1}{x}\,dx=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\int_t^b\frac{1}{x}\,dx=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\left[\ln(x)\right]_t^b=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\left[\ln(b)-\ln(t)\right]\quad\text{mit } b\in\mathbb{R}^+$$

Da in diesem Beispiel kein Grenzwert existiert kann dem Integral kein Wert zugewiesen werden.

Aufgaben:

25. Untersuchen Sie, für welche $k \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_0^b \frac{1}{x^k}\,dx$ existiert. Dabei ist $b \in \mathbb{R}^+$. Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch!
26. Untersuchen Sie, ob folgende Integrale existieren und geben Sie gegebenenfalls ihre Werte an!

    a) $\int_0^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ b) $\int_0^4 x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

    d) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ e) $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ f) $\int_{-4}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$
27. Bilden Sie zunächst die Ableitung der Funktion $f_a(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right);\ a > 0,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{D}_{max}$ und zeigen Sie sodann, das dem Integral

    $$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

    ein ganz bestimmter Zahlenwert zugeordnet werden kann.
28. Bei den folgenden Integralen liegt im Inneren des Integrationsintervalls eine Stelle, an der der Integrand nicht definiert ist. Zerlegen Sie zunächst das Integral in zwei uneigentliche Integrale, bei denen diese Stelle jeweils am Rande liegt und zeigen Sie sodann, dass den Integralen jetzt ein Wert zugeordnet werden kann.

    a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|}\,dx$
29. Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_0^1 \ln(x)\,dx$
30. Existiert das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,dx$?