§ 31 Umkehrfunktion

31.1 Beispiel und Hinführung

Ein Körper bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_0 = 1\frac{m}{s}$. Zum Zeitpunkt $t = 0s$ beschleunigt er mit $a = 0,5\frac{m}{s^2}$. Der Beschleunigungsvorgang dauert 6 Sekunden. Für die Momentangeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit gilt!

$v(t) = at + v_0 \quad \Rightarrow v(t) = 0,5\frac{m}{s^2} \cdot t + 1\frac{m}{s}$

Der Einfachheit halber wollen wir in der Mathematik die Einheiten weglassen (da eh klar ist worum es geht) und anstelle von t verwenden wir x und statt v schreiben wir y. Dann gilt mit eingesetzten Zahlenwerten:

$$f : x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = 0,5x + 1$$

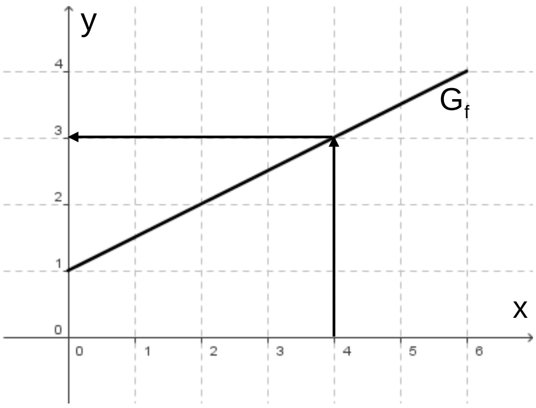
mit $\mathbb{D}_f = [0; 6]$ und $\mathbb{W}_f = [1; 4]$

Es lässt sich nun sehr leicht berechnen wie groß z. B. die Momentangeschwindigkeit nach einer Zeit von $x = 4$ ist.

$f(4) = 0,5 \cdot 4 + 1 = 3$

Die Geschwindigkeit beträgt also $3\frac{m}{s}$.

Eine graphische Lösung wäre auch möglich gewesen.



Interessiert nun aber die umgekehrte Frage: „Wie lange benötigt er um auf eine Geschwindigkeit von $3,5\frac{m}{s}$ zu beschleunigen?“

So erhält man die Antwort, indem man zunächst die Gleichung

$$y = 0,5x + 1$$

nach x auflöst

$$y - 1 = 0,5 \cdot x$$

$$x = 2y - 2$$

und hier dann die Geschwindigkeit für y einsetzt.

$x = 2 \cdot 3,5 - 2 = 5$

Also ist eine Zeit von $5s$ nötig.

Dieser umgekehrte Zusammenhang lässt sich auch wieder als Funktion schreiben:

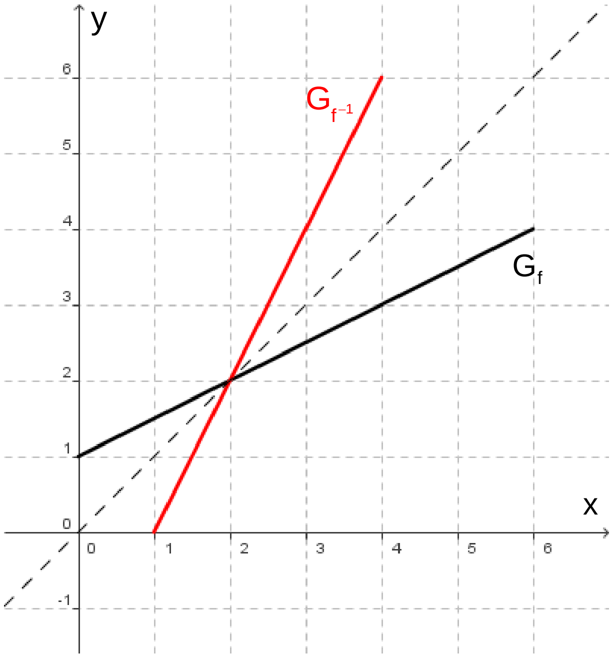
$$g : y \mapsto x \quad \text{mit} \quad x = 2y - 2$$

Für die Definitionsmenge der Funktion g gilt: $\mathbb{D}_g = [1; 4]$

Und für die Wertemenge gilt: $\mathbb{W}_g = [0; 6]$

Um es aber wieder mathematisch zu halten (y lässt sich aus x berechnen) schreiben wir diesen Sachverhalt wieder um.
Somit folgt für den umgekehrten Zusammenhang:

$$f^{-1}: x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = 2x - 2$$
$$\mathbb{D}_{f^{-1}} = [1; 4]$$
$$\mathbb{W}_{f^{-1}} = [0; 6]$$



Den umgekehrten Zusammenhang beschreibt die Funktion f^{-1}, sie heißt die Umkehrfunktion von f.

Bemerkung: Spiegelt man den Graph einer Funktion f an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten $(g: y = x)$, so erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1}.

Aufgaben:

1. Bilden Sie zu folgenden Funktionen die Umkehrfunktion. Geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion an und zeichnen Sie die Funktionsgraphen.
   a) $f: x \mapsto 2x - 3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
   b) $f: x \mapsto x^2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
   c) $f: x \mapsto x^3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
   d) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
   e) $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
   f) $f: x \mapsto e^{x+2}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

31.2 Umkehrbarkeit einer Funktion

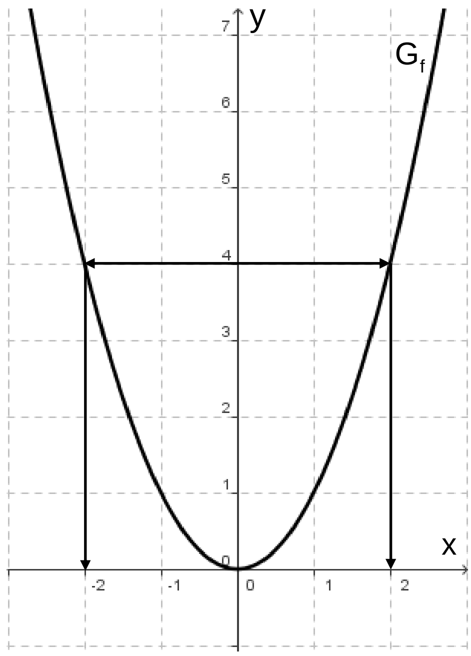
Es stellt sich nun die Frage, ob jede Funktion uneingeschränkt umkehrbar ist?

Betrachten wir dazu die Funktion

$$f : x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = x^2$$

mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und der Wertemenge $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.

Die Funktion f ordnet der Zahl 2 eindeutig die Zahl 4 zu, und der Zahl –2 ordnet sie ebenfalls eindeutig die Zahl 4 zu.
Fragt man sich aber nun umgekehrt, woher den die Zahl 4 kommt, so findet man keine eindeutige Lösung. Es gibt somit keine eindeutige Zuordnung und daher lässt sich das umgekehrte Problem nicht durch eine Funktion darstellen.
Es gibt keine Umkehrfunktion.



Betrachtet man obigen Sachverhalt graphisch, so kann man sagen:
Schneidet eine Parallele zur x-Achse den Graphen einer Funktion f mindestens zweimal, so existiert keine Umkehrfunktion.

Und mathematisch:
Folgt aus $x_1 \neq x_2$ dass $f(x_1) = f(x_2)$, so existiert keine Umkehrfunktion.

Somit ist eine Funktion umkehrbar, wenn zu zwei verschiedenen x-Werten stets verschiedene y-Werte gehören.
(Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend, für die Umkehrbarkeit einer Funktion.)
Das ganze wieder etwas mathematisch formuliert:
Eine Funktion f ist genau dann umkehrbar, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f$ gilt:
Ist $x_1 \neq x_2$ so folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Sei also $x_1 < x_2$, dann muss aber auch $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_1) > f(x_2)$ gelten.
Somit müsste die Funktion f dann streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend sein.

Tja und das reicht dann schon aus um zu bestimmen ob eine Funktion umkehrbar ist.
Denn es gilt nun folgender

SATZ:
Streng monotone Funktionen sind umkehrbar.

Ist also eine Funktion f mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ gebeben, so gilt:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Ist} & f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_f \\ \text{Oder} & f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_f \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ ist umkehrbar}$$

Beispiel:
Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^3 + x - 2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
Da $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$ ist die Funktion f umkehrbar.

Aufgaben:
2. Prüfe folgende Funktionen auf Umkehrbarkeit und gib wenn möglich die Umkehrfunktion sowie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion an.
   a) $f: x \mapsto 1 - x^3$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
   b) $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $W =]-1;1[$
   c) $f: x \mapsto \frac{1-x}{x-2}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
   d) $f: x \mapsto 1 + \sqrt{1+x^2}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^-$
   e) $f: x \mapsto e^{x+2}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
   f) $f: x \mapsto e^{x^2+2}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
   g) $f: x \mapsto e^{x^2+2x}$, $\mathbb{D}_f = [-1; \infty]$
   h) $f: x \mapsto 1 + \sin(x)$, $\mathbb{D}_f = [0; \pi]$
   i) $f: x \mapsto x^2 - 2x$, $\mathbb{D}_f =]-\infty; 1]$

31.3 Monotonieverhalten der Umkehrfunktion
Bei obigen Aufgaben wurde vielleicht schon festgestellt, dass die Umkehrfunktion einer streng monoton steigenden Funktion ebenfalls streng monoton steigend verläuft. Dies lässt sich in einem allgemeinen Satz formulieren.

SATZ:
Die Umkehrfunktion einer streng monoton zunehmenden (bzw. abnehmenden) Funktion ist selbst wieder streng monoton zunehmend (bzw. abnehmend).

Beweis (Widerspruchsbeweis!):
Sei f ein in $\mathbb{D}_f$ streng monoton zunehmende Funktion, so gilt für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f$:
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \text{ bzw. } y_1 < y_2$$

Es gilt nun: $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$
Daraus folgt logischerweise: $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

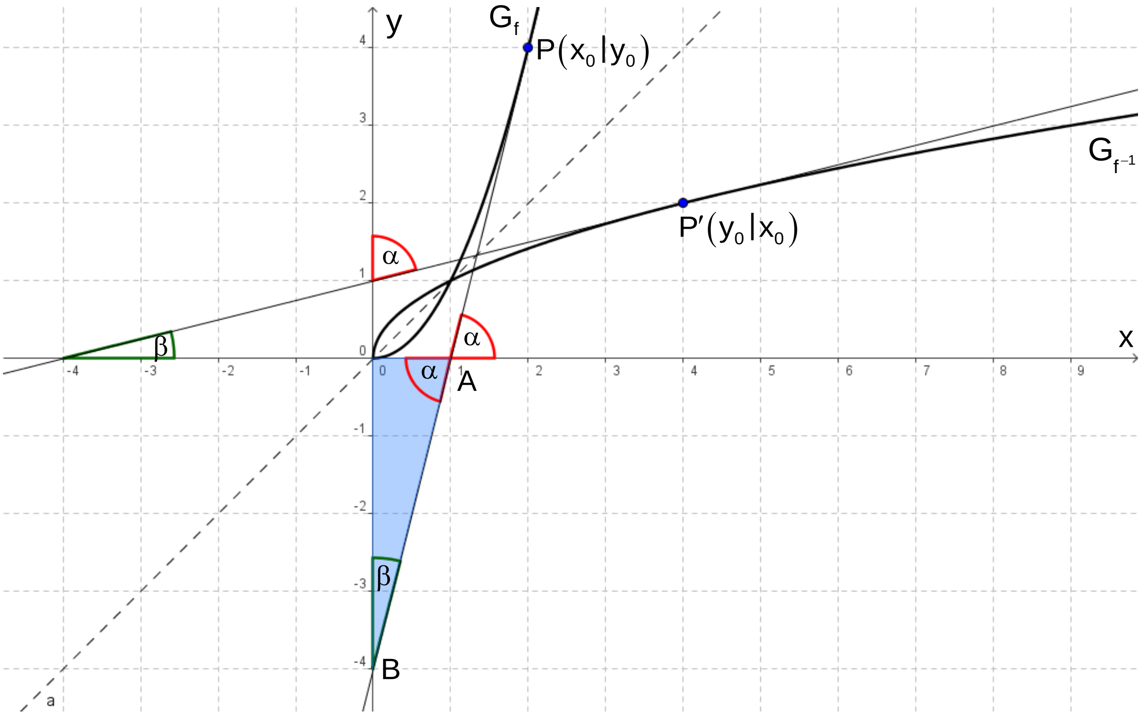
Annahme: Sei f^{-1} nicht streng monoton zunehmend, also dann streng monoton abnehmend, dann gilt:
$$y_1 < y_2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$$
$$y_1 < y_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 > x_2$$
Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $x_1 < x_2$. □

Noch einige wichtige Beziehungen zwischen einer Funktion f und seiner Umkehrfunktion f^{-1}:

- Bildet man die Umkehrfunktion zu f^{-1}, so erhält man die ursprüngliche Funktion:
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$
- Zwischen f und f^{-1} bestehen folgende Beziehungen:
$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) = x \text{ für } x \in \mathbb{D}_f$$
$$f\left(f^{-1}\left(x\right)\right) = x \text{ für } x \in \mathbb{D}_{f^{-1}}$$

31.4 Ableitung der Umkehrfunktion

Wir wollen nun untersuchen, welcher Zusammenhang im Fall der Differenzierbarkeit zwischen der Ableitung einer umkehrbaren Funktion f und der Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} besteht.
Dazu betrachten wir den Graphen G_f einer streng monoton steigenden Funktion f. Dieser hat im Punkt $P\left(x_0 | y_0\right)$ die Tangentensteigung $\tan\alpha = f'\left(x_0\right) \neq 0$.
Und $G_{f^{-1}}$ hat als Spiegelbild von G_f bezüglich der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten im Punkt $P'\left(y_0 | x_0\right)$ die Tangentensteigung $\tan\beta = \left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right)$.



Im ΔOAB gilt: $\beta = 90° - \alpha$

Somit folgt: $\tan\beta = \tan\left(90° - \alpha\right) = \dfrac{\sin\left(90° - \alpha\right)}{\cos\left(90° - \alpha\right)} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Bzw.: $\boxed{\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right) = \dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}}$

In obigem Beispiel gilt:

$$f(x) = x^2 \quad P(2|4) \qquad\qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad P'(4|2)$$

$$f'(x) = 2x \qquad\qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(2) = 4 \qquad\qquad \left(f^{-1}\right)'(4) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(4) = \frac{1}{f'(2)}$$

Setzt man in diese „lokal“ gewonnen Formel allgemein x und y ein, so erhält man:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Da man die Umkehrfunktion aber als Funktion von x angibt muss man jetzt noch x mit y vertauschen und erhält:

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)}} \quad \text{mit } y = f^{-1}(x)$$

Nun gilt folgender

SATZ:
Ist die umkehrbare Funktion f in einem Intervall $J \subset \mathbb{D}_f$ differenzierbar, so ist die Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $x = f(y)$ ebenfalls differenzierbar, und es gilt:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{mit } y = f^{-1}(x)$$

wobei $y \in J$ und $f'(y) \neq 0$ vorausgesetzt ist.

Obige Beziehung hätte man auch rechnerisch erhalten, wenn man davon ausgeht, dass die Funktion f und die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar sind.
Dazu bildet man die Ableitung des Terms $f\left(f^{-1}(x)\right)$.
Nach der Kettenregel folgt:

$$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]' = f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x)$$

$$[x]' = f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x)$$

$$1 = f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

Beispiel 1:

$f(x) = x^2 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+ \quad \to f'(x) = 2x \quad \overset{x \leftrightarrow y}{\to} f'(y) = 2y$

$y = x^2$

$\sqrt{y} = x \quad x \leftrightarrow y$

$y = \sqrt{x}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x} = y \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+ \qquad \to \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ mit $\mathbb{D}_{\left(f^{-1}\right)'} = \mathbb{R}^+$

Leitet man die Funktion $f^{-1}(x)$ unmittelbar ab, so erhält man das gleiche Ergebnis!

Beispiel 2:

$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^- \quad \to f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \overset{x \leftrightarrow y}{\to} f'(y) = -\frac{1}{y^2}$

$y = 1 + \frac{1}{x}$

$\dfrac{1}{y-1} = x \quad x \leftrightarrow y$

$y = \dfrac{1}{x-1}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1} = y \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \left]-\infty; 1\right[\qquad \to \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{-\frac{1}{y^2}} = -y^2 = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Bildet man auch hier unmittelbar die Ableitung von $f^{-1}(x)$ so erhält man selbiges Ergebnis!

Aufgaben:

3. Bestimme die Umkehrfunktion f^{-1} und ermittle deren Ableitung nach obigem Schema. Kontrolliere, wenn möglich, durch unmittelbares Differenzieren!
   a) $f: x \mapsto 3x + 5 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
   b) $f: x \mapsto \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3 \quad \mathbb{D}_f = [-1; 3]$
   c) $f: x \mapsto \dfrac{1-x}{x} \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   d) $f: x \mapsto \sqrt{e^x + 4} \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
   e) $f: x \mapsto \ln\left(x^2 + 2\right) \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
   f) $f: x \mapsto e^{x^2+1} \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ umkehrbar ist!
   Der Punkt P' liegt spiegelbildlich zum Punkt $P(2|f(2))$ bezüglich der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten. Gib die Koordinaten von P' und die Steigung des Graphen $G_{f^{-1}}$ im Punkt P' an!

5. Zeigen Sie, dass die Funktion $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 + 5x - 1$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ umkehrbar ist!
   Wo hat der Graph $G_{f^{-1}}$ eine steilste oder flachste Stelle?

6. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x - \frac{1}{4}x^2$; $\mathbb{D}_f =]-\infty; 4]$.
   a) Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist und zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $[-1; 4]$.
   b) Bestimmen Sie f^{-1} und zeichnen Sie $G_{f^{-1}}$ in das bereits vorliegende Koordinatensystem ein!
   c) Ermitteln Sie auf zwei verschiedene Arten die Ableitung von f^{-1}.
   d) Welchen Inhalt hat das Flächenstück, das G_f und $G_{f^{-1}}$ im 1. Quadranten miteinander einschließen?

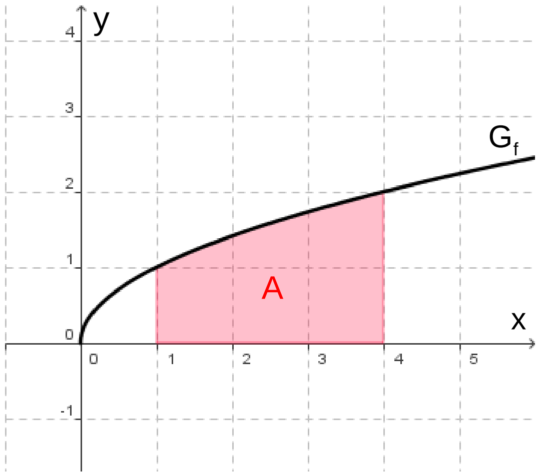
7. Der Graph einer Funktion f hat im Punkt $P(3|f(3))$ die Tangente mit der Gleichung $g: y = 2x - 1$. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion im Punkt P'.

31.5 Integration mit Hilfe der Umkehrfunktion

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$.
Möchte man das bestimmte Integral

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

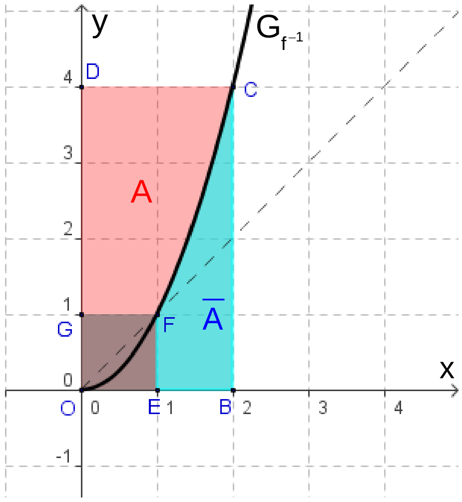
berechnen und kennt die Stammfunktion von f nicht, so kann man einen etwas anderen Lösungsweg einschlagen (der aber auch nicht unbedingt immer zu einem Ergebnis führen muss!).
Schauen wir uns dazu das zu lösende Problem, bzw. die gesuchte Fläche einfach mal an.



Wir gehen nun bei der Flächenberechnung einen „kleinen" Umweg über die Umkehrfunktion von f

$$f^{-1}(x) = x^2; \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$$

und zeichnen den dazugehörigen Funktionsgraph (geht aus Spiegelung des Graphen G_f an der Winkelhalbierenden hervor) und die oben gesuchte Fläche in ein Koordinatensystem ein.



Für die gesuchte Fläche gilt dann:

$$A = A_{OBCD} - A_{OEFG} - \overline{A}$$

$$A = 2\cdot 4 - 1\cdot 1 - \int_1^2 x^2 dx$$

$$A = 8 - 1 - \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^2$$

$$A = 7 - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 8 - \tfrac{1}{3}\cdot 1\right)$$

$$A = 7 - \tfrac{7}{3}$$

$$A = 4\tfrac{2}{3}$$

Also gilt: $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = 4\tfrac{2}{3}$

Man kann für solche Aufgaben eine allgemeine Formel angeben:

$$\int_a^b f(x)dx = b\cdot f(b) - a\cdot f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx$$

Den Beweis bleiben wir uns hier schuldig. Ein Vergleich mit obigem Beispiel macht die Sache aber klar!

Aufgaben:

8.) Berechne nach obigem Beispiel folgende Integrale.

a) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\ dx$

b) $\int_1^{10} \sqrt{x-1}\ dx$

c) $\int_1^5 \ln x\ dx$

9.) Versuchen Sie nach obigem Schema $a \in \mathbb{R}^+$ so zu bestimmen, dass gilt:

$$\int_a^2 \ln x \, dx = 0$$

10.) Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph der Funktion f, mit $f(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x$, mit dem Graph seiner Umkehrfunktion f^{-1} im 1. Quadranten einschließt.