Der Ziellose erleidet sein Schicksal –
Der Zielbewusste gestaltet es.
(Immanuel Kant)

§ 21 Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen

Eine „Kurvendiskussion“ einer Funktion ist nötig, um eine Aussage über den Verlauf des Graphen einer Funktion zu machen. Dabei interessiert das Globalverhalten, Nullstellen, Symmetrie, Extrema, Wendepunkte, …. .

21.1 Grenzwerte

Bei den ganzrationalen Funktionen haben wir bereits deren Globalverhalten bestimmt. D.h. wir haben eine Aussage darüber gemacht, wie sich die Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ verhalten.

Bei den Funktionen, die nun hier betrachtet werden ist das nicht mehr ganz so einfach …. aber doch noch gut machbar.

Beispiel 1: Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$ für $x \to \pm\infty$.

Beginnen wir mit $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underset{\to\infty}{x^2} \cdot \underset{\to\infty}{e^{\overset{\to\infty}{x}}} = \infty$$

Bemerkung: Ist der gegebene Funktionsterm ein Produkt, so betrachtet man das Verhalten der einzelnen Faktoren. Hat man dann ein Produkt der Form $"\infty \cdot \infty"$, so erhält man als Grenzwert auch ∞. Ein Produkt der Form $"-\infty \cdot \infty"$ ergäbe dann den Grenzwert $-\infty$.

Nun betrachten wir $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underset{\to\infty}{x^2} \cdot \underset{\to 0}{e^{\overset{\to-\infty}{x}}} = 0$$

Bemerkung: Ist der gegebene Funktionsterm ein Produkt und einer der Faktoren eine e-Funktion, so überwiegt der Grenzwert dieser Funktion. Also obiges Produkt der Form $"\infty \cdot 0"$, liefert den Grenzwert 0. (Dabei muss die 0 von der e-Funktion kommen).
Als Begründung reicht hier: „Die e-Funktion überwiegt“ oder auch „Die e-Funktion gewinnt“.

Beispiel 2: Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte der Funktion f mit $f(x) = (2x-4) \cdot e^{-x+3}$ für $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(2x-4)}_{\to-\infty} \cdot \underset{\to\infty}{e^{\overset{\to\infty}{-x+3}}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{(2x-4)}_{\to\infty} \cdot \underset{\to 0}{e^{\overset{\to-\infty}{-x+3}}} = 0 \qquad \text{(e-Funktion gewinnt!)}$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte der Funktion f für $x \to \pm\infty$.
   a) $f(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{2x}$
   b) $f(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{x^2}$
   c) $f(x) = \left(1-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot e^{-x}$
   d) $f(x) = \left(1-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot e^{-x^2}$
   e) $f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2-1}$
   f) $f(x) = \left(-x^4 + 4x^2\right) \cdot e^{-x^2+2}$
   g) $f(x) = \left(e^x - 1\right) \cdot \left(1 + e^{-x}\right)$
   h) $f(x) = x \cdot e^{-x} + 1$
   i) $f(x) = 2 - x \cdot e^{-x^2}$
   j) $f(x) = x + e^{-x^2}$

Eine Alternativformulierung wäre: Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern seiner Definitionsmenge.
Unter Ränder versteht man hier allerdings $x \to \pm\infty$!

21.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Zum besseren Zeichnen des Funktionsgraphen ist der Schnittpunkt mit der y-Achse und mögliche Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) sehr hilfreich.

Beispiel 3: Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit $f(x)=(x-2)\cdot e^{-x}$ mit den Koordinatenachsen.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)=(0-2)\cdot e^{-0}=-2\cdot 1=-2 \quad\Rightarrow\quad S_y(0|-2)$

Schnittpunkt(e) mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x)&=0 \\ \underbrace{(x-2)}_{=0}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}&=0 \quad (\text{Nullproduktregel!}) \\ x-2&=0 \quad |+2 \\ x&=2 \quad (1x) \end{aligned}$$

Da $x=2$ eine einfache Nullstelle ist, schneidet der Graph der Funktion f die x-Achse im Punkt $S_x(2|0)$.

Aufgaben:

2. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen.
   a) $f(x)=(2x+4)\cdot e^{x-2}$
   b) $f(x)=(x+3)^2\cdot e^{3-x}$
   c) $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)\cdot e^{2-\frac{1}{2}x^2}$

3. Ermitteln Sie die Nullstelle(n) der Funktion f. Geben Sie, wenn möglich, auch die Vielfachheit der Nullstelle an.
   a) $f(x)=(x^2+2x)\cdot e^{-x}$
   b) $f(x)=(x^3+2x^2+x)\cdot e^{x^2-1}$
   c) $f(x)=(x^3-1)\cdot e^{-2x}$
   d) $f(x)=(e^x-1)\cdot(e^x-2)$
   e) $f(x)=(e^{x-2}-2)\cdot(e^{2-x}+2)$
   f) $f(x)=(e^{x+2}-e)\cdot\left(e^{1-x}-\frac{1}{e}\right)$
   g) $f(x)=e^{2x}-e^x$
   h) $f(x)=e^{2x}+e^x-6$
   i) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+e^x-4$

21.3 Symmetrieverhalten

Hin und wieder kommt es auch einmal vor, dass der Graph einer untersuchten Exponentialfunktion eine Symmetrie zum Koordinatensystem aufweist.

Beispiel 4: Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$, punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft.

Wir bilden also:

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{(-x)^2} = -x \cdot e^{x^2} = -f(x)$$

Somit ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (Definitionsmenge ist ebenfalls symmetrisch!)

Aufgaben:

4. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f, $D_f = \mathbb{R}$, hinsichtlich einer Symmetrie zum Koordinatensystem.
   a) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2+2}$
   b) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{x+2}$
   c) $f(x) = x \cdot e^{-x}$
   d) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot e^{2-x^2}$
   e) $f(x) = (e^x - 1) \cdot (e^x + 1)$
   f) $f(x) = 1 - e^{-x^2}$

21.4 Monotonie und relative Extrema

Zum besseren Zeichnen des Funktionsgraphen benötigt man auch dessen Monotonieintervalle bzw. auch die Art und Lage etwaiger relativer Extrema.

Beispiel 5: Ermitteln Sie die Monotonieintervalle des Graphen der Funktion f mit $f\left(x\right)=2x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ und bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrema des Funktionsgraphen.

Für die 1. Ableitung gilt:

$$f^{/}\left(x\right)=2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}+2x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot\left(-x\right)$$
$$f^{/}\left(x\right)=\left(2-2x^2\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Mit $f^{/}\left(x\right)=0$ folgt:

$$\left(2-2x^2\right)\cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{\neq 0}=0$$
$$2-2x^2=0 \quad |-2$$
$$-2x^2=-2 \quad |:\left(-2\right)$$
$$x^2=1 \quad |\sqrt{\ldots}$$
$$x_{1/2}=\pm 1 \quad \text{je }\left(1x\right)$$

Somit lässt sich eine Zerlegung von $f^{/}\left(x\right)$ angeben:

$$f^{/}\left(x\right)=-2\left(x-1\right)\left(x+1\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Mit Hilfe einer Vorzeichentabelle folgt dann:

VZT		-1		1		$\rightarrow x$
-2	$-$		$-$		$-$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$+$		$+$		$+$	
$f^{/}\left(x\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
G_f	↘	$\rightarrow$ TP	↗	$\rightarrow$ HP	↘	

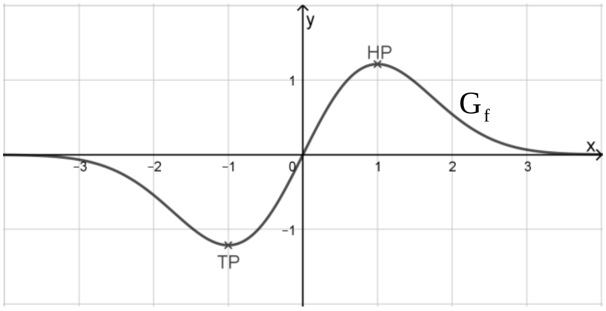
Der Graph der Funktion f ist streng monoton steigend in $\left[-1;1\right]$.

Der Graph der Funktion f ist streng monoton fallend in $\left]-\infty;-1\right]$ und in $\left[1;\infty\right[$.

$$f\left(-1\right)=2\cdot\left(-1\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(-1\right)^2}=-2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\approx -1,21 \;\Rightarrow\; TP\left(-2\middle|-2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f\left(1\right)=2\cdot 1\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 1^2}=2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\approx 1,21 \;\Rightarrow\; HP\left(2\middle|2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Und hier noch der Graph der Funktion f (auch wenn die Zeichnung nicht verlangt war!).



Aufgaben:

5. Bestimmen Sie die Monotonieintervalle sowie Art und Lage der relativen Extrema des Graphen der Funktion f.
   a) $f(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
   b) $f(x) = 5x^2 \cdot e^{x-1}$
   c) $f(x) = 2x \cdot e^{1-\frac{1}{2}x^2}$
   d) $f(x) = x^2 \cdot e^{1-x^2}$
   e) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{1-x^2}$
   f) $f(x) = 2x \cdot e^{-x^2+x}$

21.5 Krümmung und Wendepunkt

Ebenfalls hilfreich zum besseren Zeichnen des Funktionsgraphen ist die Kenntnis der Krümmungsintervalle und die Koordinaten des/der Wendepunkte(s).

Beispiel 6: Ermitteln Sie die Krümmungsintervalle des Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ und bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

Für die 1. Ableitung gilt:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + x \cdot \tfrac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$
$$f'(x) = \left(1 + \tfrac{1}{2}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Für die 2. Ableitung folgt dann:

$$f''(x) = \tfrac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(1 + \tfrac{1}{2}x\right) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$
$$f''(x) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$
$$f''(x) = \left(1 + \tfrac{1}{4}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Mit $f''(x) = 0$ folgt:

$$\left(1 + \tfrac{1}{4}x\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$
$$1 + \tfrac{1}{4}x = 0 \qquad \left| -1 \right.$$
$$\tfrac{1}{4}x = -1 \qquad \left| : \tfrac{1}{4} \right.$$
$$x = -4 \qquad (1x)$$

Somit lässt sich eine Zerlegung von $f''(x)$ angeben:

$$f''(x) = \tfrac{1}{4} \cdot (x + 4) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Mit Hilfe einer Vorzeichentabelle folgt dann:

VZT		-4		x
$\frac{1}{4}$	$+$		$+$	
$x+4$	$-$	0	$+$	
$e^{\frac{1}{2}x}$	$+$		$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	
G_f		WP		

Der Graph der Funktion f ist rechtsgekrümmt in $\left]-\infty; -4\right]$.

Der Graph der Funktion f ist linksgekrümmt in $\left[-4; \infty\right[$.

$$f(-4) = -4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(-4)} = -4 \cdot e^{-2} \approx -0{,}54 \quad \Rightarrow \quad WP\left(-4 \middle| -4 \cdot e^{-2}\right)$$

Aufgaben:

6. Bestimmen Sie die Krümmungsintervalle sowie die Koordinaten des/der Wendepunkte(s) des Graphen der Funktion f.
   a) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$
   b) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$
   c) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2 - x}$
   d) $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

21.6 Stammfunktion

Mit den bisherigen Methoden lassen sich zu Exponentialfunktionen bedingt Stammfunktionen bilden. Meist muss man sich damit begnügen, dass diese vorgegeben ist und man lediglich den Nachweis dafür erbringen muss.

Beispiel 7: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{3x}$. Geben Sie eine Stammfunktion F von f an.

Wir wissen ja, dass die Exponentialfunktion beim Bilden der Ableitung stets als solches erhalten bleibt. Vom Nachdifferenzieren kommt dann halt noch ein multiplikativer Term dazu. Hätte man also $g(x) = e^{2x}$ so würde gelten: $g'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

Wäre nun $g(x) = 2e^{2x}$, so würde für die Stammfunktion G von g gelten:

$G(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x}$

Somit folgt für die Stammfunktion F von f: $F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$

Bemerkung: Das funktioniert bei Exponentialfunktionen nur, wenn sie in der Form $a \cdot e^{mx+t}$ gegeben sind.

Aufgaben:

7. Geben Sie eine Stammfunktion F von f an.
   a) $f(x) = e^{5x}$
   b) $f(x) = e^{0,5x}$
   c) $f(x) = 2e^{-5x}$
   d) $f(x) = -3e^{\frac{1}{2}x}$
   e) $f(x) = 4e^{-x+1}$
   f) $f(x) = \frac{2}{3}e^{2x-1}$
   g) $f(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x+3} + 1$
   h) $f(x) = x - \frac{1}{5}e^{\frac{1}{5}x+3}$

Beispiel 8: Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x)=x\cdot e^{x}$ eine Stammfunktion von f mit $f(x)=(x+1)\cdot e^{x}$ ist.

Dazu bildet man die 1. Ableitung der Funktion F:

$$F'(x)=1\cdot e^{x}+x\cdot e^{x}=(1+x)\cdot e^{x}=f(x)$$

Somit haben wir gezeigt, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Aufgaben:

8. Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.
   a) $F(x)=x^2\cdot e^{x}$ $\quad f(x)=(x^2+2x)\cdot e^{x}$
   b) $F(x)=x\cdot e^{x^2}$ $\quad f(x)=(2x^2+1)\cdot e^{x^2}$
   c) $F(x)=(x^2-4x)\cdot e^{2x}$ $\quad f(x)=(2x^2-6x-4)\cdot e^{2x}$
   d) $F(x)=x^2\cdot e^{x}$ $\quad f(x)=(x^2+2x)\cdot e^{x}$
   e) $F(x)=(x^2-1)\cdot e^{1-x^2}$ $\quad f(x)=(-2x^3+4x)\cdot e^{1-x^2}$

21.7 Aufgaben zur vertiefenden Übung

9.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=4x\cdot e^{-x}$; $D_f=\mathbb{R}$.
9.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion f an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswert an den Rändern seiner Definitionsmenge.
9.2 Ermitteln Sie die Monotonieintervalle und bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extremums des Graphen der Funktion f.
9.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f und ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.
9.5 Zeichen Sie für $-0,5\le x\le 8$ den Graphen der Funktion f.
9.5 Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x)=(-4x-4)\cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
Ermitteln Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse und der senkrechten Geraden mit der Gleichung $x=2$ im 1. Quadranten einschließt. Schraffieren Sie diese Fläche in Ihrer Zeichnung von 9.4.

10.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x\cdot e^{x}$; $D_f=\mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
10.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f.
10.2 Untersuchen Sie das Verhalten des Funktionsgraphen von f für $|x|\to\infty$.
10.3 Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extremum von G_f.
10.4 Bestimmen Sie die Lage des Wendepunktes von G_f und ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.
10.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-4\le x\le 1$.
10.6 Zeigen Sie, dass $F(x)=(x-1)\cdot e^{x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

10.7 Berechnen Sie den Betrag der Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = -4$ im 3. Quadranten einschließt und schraffieren Sie die berechnete Fläche im Koordinatensystem von 1.5

11.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (1-x)\cdot e^{x}$; $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
11.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f.
11.2 Untersuchen Sie das Verhalten des Funktionsgraphen von f für $|x| \to \infty$.
11.3 Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extremum von G_f.
11.4 Bestimmen Sie die Lage des Wendepunktes von G_f und ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.
11.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-4 \le x \le 2$.
11.6 Zeigen Sie, dass $F(x) = (-x+2)\cdot e^{x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$ und schraffieren Sie die entsprechende Fläche in ihrem Koordinatensystem.

12.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x+2)\cdot e^{-x}$; $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
12.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f.
12.2 Untersuchen Sie das Verhalten des Funktionsgraphen von f für $|x| \to \infty$.
12.3 Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extremum von G_f.
12.4 Bestimmen Sie die Lage des Wendepunktes von G_f und ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.
12.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-2{,}5 \le x \le 5$.
12.6 Zeigen Sie, dass $F(x) = (-x-3)\cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ und schraffieren die entsprechende Fläche in ihrem Koordinatensystem.

13.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$; $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
13.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f.
13.2 Untersuchen Sie das Verhalten des Funktionsgraphen von f für $x \to -\infty$.
13.3 Bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrema von G_f.
13.4 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte von G_f.
13.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-1 \le x \le 6$.
13.6 Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass $F(x) = (ax^2 + bx + c)\cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.
13.7 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{0}^{6} f(x)\,dx$ und schraffieren Sie die entsprechende Fläche in ihrem Koordinatensystem.

14.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$; $D_f=\mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet. (Gauß`sche Glockenkurve; befand sich auf dem 10DM-Schein)

14.1 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie.

14.2 Bestimmen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion f für $x\to\pm\infty$ und geben Sie die Gleichung seiner Asymptote an. Entscheiden Sie nachvollziehbar, ob sich der Graph von oben oder von unten an die Asymptote annähert.

14.3 Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extremum von G_f . Geben Sie die Wertemenge des Graphen der Funktion f an.

14.4 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte von G_f .

14.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-3\le x\le 3$.

15.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f\left(x\right)=4x\cdot e^{-x^2}$; $D_f=\mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

15.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f.

15.2 Bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrema von G_f .

15.3 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte von G_f .

15.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-3\le x\le 3$.

15.5 Zeigen Sie, dass $F\left(x\right)=-2\cdot e^{-x^2}$ eine Stammfunktion von $f\left(x\right)$ ist.

15.6 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 f\left(x\right)dx$ und schraffieren Sie die entsprechende Fläche in ihrem Koordinatensystem.

16.0 Gegeben ist die Funktion f_k mit $f_k\left(x\right)=x^2e^{1-kx}$; $D_{f_k}=\mathbb{R}$ und $k\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$. Der Graph der Funktion f_k wird mit G_k bezeichnet.

16.1 Zeigen Sie, dass der Graph G_k einen von k unabhängigen Terrassenpunkt besitzt und geben Sie auch dessen Koordinaten an.

16.2 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Art und Lage des relativen Extremum von G_k.

16.3 Zeigen Sie, dass die Funktion f_k für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ neben dem Terrassenpunkt noch zwei weitere Wendepunkte besitzt.

16.4 Ermitteln Sie für $k = 1$ die Koordinaten der Wendepunkte, sowie die Gleichungen der Wendetangenten.

16.5 Zeichnen Sie für $k = 1$ den Graphen der Funktion f_1 für $-1 \le x \le 8$. Zeichnen Sie auch die beiden Wendetangenten ein.

16.6 Die Stammfunktion von $f_1(x)$ ist von der Form $F(x) = g(x) \cdot e^{1-x}$ mit einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades. Bestimmen Sie die Funktion $g(x)$.

16.7 Berechnen Sie $\int_0^6 f_1(x)\,dx$ und schraffieren Sie die berechnete Fläche in ihrem Koordinatensystem.

17.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \left(e^x - e^{-x}\right);\ D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

17.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

17.2 Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion f für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

17.3 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f in der gesamten Definitionsmenge streng monoton steigt.

17.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

17.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-1 \le x \le 1$.

18.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{2x} - 2e^x;\ D_f = \mathbb{R}$.

18.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f.

18.2 Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion f für $|x| \to \infty$. Geben Sie die Art sowie die Gleichung der Asymptote des Graphen an.

18.3 Ermitteln Sie Art und Lage des relativen Extremum des Graphen der Funktion f.

18.4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen der Funktion f.

18.5 Zeichnen Sie für $-3 \le x \le 1$ den Graphen der Funktion f.

18.6 Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x$ eine Stammfunktion von f ist und berechnen Sie damit den Betrag der Fläche, die der Graph der Funktion f mit den Koordinatenachsen im 4. Quadranten einschließt.

19.0 Gegeben ist die Funktion f_k mit $f_k(x) = (x - k) \cdot e^{k - \frac{1}{2}x};\ k \in \mathbb{R}$ und $D_{f_k} = \mathbb{R}$.

19.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f_k.

19.2 Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion f_k für $|x| \to \infty$.

19.3 Bestimmen Sie die Art und Lage des relativen Extremums.

19.4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen der Funktion f_k und ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.

19.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $F_k(x) = (-2x + 2k - 4) \cdot e^{k - \frac{1}{2}x}$ eine Stammfunktion der Funktion f_k ist.

19.6 Berechnen Sie $\int_{x_N}^{x_E} f_k(x)\,dx$. $\left(x_N : \text{Nullstelle; } x_E : \text{Extremstelle}\right)$