Natürlichkeit ist die innere Macht,
die Geist, Gefühl und Köper
im Gleichklang hält …
(Elmar Kupke)

§ 20 Die natürliche Exponentialfunktion

Unter allen Exponentialfunktionen gibt es allerdings eine besondere, die in der Mathematik eine große Rolle spielt.

Die Exponentialfunktion f mit

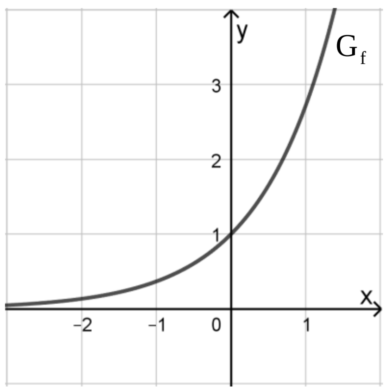
$$f(x) = 2{,}718281828459045235..^{x}$$

nennt man die natürliche Exponentialfunktion zur Basis 2,71828… . Um nicht immer diese unendlich lange Zahl 2,718281828459045235.. zu schreiben verwendet man stattdessen den Buchstaben e. Also vereinfacht:

$$f(x) = e^{x}$$

Die Zahl e ist wie die Zahl π eine irrationale Zahl. D.h. sie ist unendlich lang (hört also nach dem Komma nie auf!) und nicht periodisch (und nicht als Bruch darstellbar!).

Der Graph der Funktion f sieht dann so aus:



Was an ihr so besonders ist, werden wir später noch sehen, wen es um die Ableitung der Exponentialfunktion geht!

20.1 Zusammenhang zwischen der allgemeinen und der natürlichen Exponentialfunktion

Ist eine (allgemeine) Exponentialfunktion gegeben, so kann man die relativ einfach in eine natürliche Exponentialfunktion umformen und natürlich umgekehrt.

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}5^{x}$. Wandeln Sie den Funktionsterm so um, dass seine Basis e wird.

Das funktioniert mit Hilfe einer kleinen Umformung.

$$f(x) = 1{,}5^{x} \overset{(1)}{=} e^{\ln\left(1{,}5^{x}\right)} \overset{(2)}{=} e^{x\cdot\ln(1{,}5)} = e^{\overbrace{\ln(1{,}5)}^{c}\cdot x}$$

(1) : Es gilt $z = e^{\ln(z)}$

(2) : Merkhilfe Seite 1: $\log_b\left(u^{z}\right) = z\cdot\log_b(u)$

Bemerkung: Jede Exponentialfunktion f der Form $f(x)=b^x$ lässt sich umformen zu einer Exponentialfunktion mit der Basis e. Dabei gilt: $f(x)=e^{\ln(b)\cdot x}$

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$. Wandeln Sie den Funktionsterm so um, dass er von der Form $f(x)=b^x$ ist.

Da $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$, folgt nach obiger Bemerkung:

$$\begin{aligned} \ln(b) &= \tfrac{1}{2} \qquad\qquad | \cdot e^{(\dots)} \\ e^{\ln(b)} &= e^{\frac{1}{2}} \\ b &= e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}65 \end{aligned}$$

Somit gilt dann: $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}=\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^x \approx 1{,}65^x$

Aufgaben

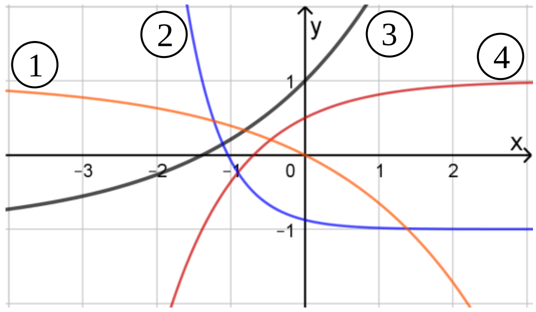
1. Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen jeweils einen Funktionsterm mit der Basis e.

   a) $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x-2$
   b) $f(x)=\frac{2}{5}\cdot 3^x$
   c) $f(x)=-2\cdot 1{,}25^x+2$
   d) $f(x)=2^{3x}$
   e) $f(x)=-2\cdot 0{,}5^{-x+1}$
   f) $f(x)=1{,}5\cdot 2{,}5^{2x+2}$

2. Gegeben ist die Funktion f. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen. Geben Sie die Gleichung der waagrechten Asymptote an und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.
   a) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^x-1$
   b) $f(x)=1-e^x$
   c) $f(x)=e^{0{,}25x}-2$
   d) $f(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{x-2}+1{,}5$
   e) $f(x)=-0{,}25\cdot e^{-2x+2}-2$
   f) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}-e$

3. Ordnen Sie den folgenden Funktionsgleichungen die jeweiligen Funktionsgraphen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

A) $f(x) = 2 \cdot e^{0,5x} - 1$
B) $g(x) = -0,5 \cdot e^{-x} + 1$
C) $h(x) = \frac{1}{8} \cdot e^{-2x} - 1$
D) $k(x) = -e^{0,5x} + 1$



4. Entscheiden Sie, welche Funktionsgraphen keine Nullstellen besitzen.

a)
- O $f(x) = -e^{-x} - 1$
- O $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}$
- O $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}$
- O $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x+1} + 1$
- O $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x+1} + 1$
- O $f(x) = \frac{1}{2}e^{2-x} - e$

b)
- O $f(x) = -4 \cdot e^{4-2x} + \frac{1}{3}$
- O $f(x) = -4 \cdot e^{2x-4} - \frac{1}{3}$
- O $f(x) = 4 \cdot e^{2x+4} + \frac{1}{3}$
- O $f(x) = -4 \cdot e^{-2x-4} + \frac{1}{3}$
- O $f(x) = 4 \cdot e^{-2x-4} + \frac{1}{3}$
- O $f(x) = -4 \cdot e^{x} + e$

5. Bestimmen Sie die Werte für $a, c, d, y_0 \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph der Funktion f die angegebenen Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen besitzt. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

a) $f(x) = a \cdot e^{2x-1} - y_0$ $\quad S_y(0|-3)$ $\quad S_x(5|0)$

b) $f(x) = 2 \cdot e^{2(x-d)} + y_0$ $\quad S_y(0|1)$ $\quad S_x(2|0)$

c) $f(x) = -1,5 \cdot e^{cx-1} + y_0$ $\quad S_y(0|3)$ $\quad S_x(-3|0)$

d) $f(x) = -\frac{1}{15} \cdot e^{2x-d} + y_0$ $\quad S_y(0|2)$ $\quad S_x(-4|0)$

6. Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte der Funktion f für $x \to \pm\infty$ an.

a) $f(x) = -2 \cdot e^{2x-1}$

b) $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-2x} + 1$

c) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{x-1} + \frac{3}{2}$

d) $f(x) = e - e^{-x-1}$

e) $f(x) = -2e^{\frac{1}{4}x-4} + 1$

f) $f(x) = 2e^{-\frac{1}{4}x-4} - 1$

7. Um die Funktion einer Bauchspeicheldrüse zu testen, wird in sie ein Farbstoff eingespritzt. Dieser Farbstoff wird von der Bauchspeicheldrüse wieder ausgeschieden. Die dabei in der Bauchspeicheldrüse noch vorhandene Menge an Farbstoff kann durch eine Funktion f mit $f(t) = a \cdot e^{c \cdot t}$, $a, c \in \mathbb{R}$, angegeben werden. Einem Patienten werden nun 0,2 g des Farbstoffes eingespritzt. Nach 7 Minuten sind noch 0,15 g des Farbstoffes in der Bauchspeicheldrüse vorhanden.

a) Ermitteln Sie den Funktionsterm $f(x)$.
b) Eine gesunde Bauchspeicheldrüse baut pro Minute ca. 4% des Farbstoffes ab. Entscheiden Sie, ob bei der untersuchten Bauchspeicheldrüse eine funktionale Störung vorliegt.
c) Bestimmen Sie die Halbwertszeit für den Abbau des Farbstoffes in der Bauchspeicheldrüse.
d) Die Nachweisgrenze des Farbstoffes in der Bauchspeicheldrüse beträgt 5 mg. Ermitteln Sie, nach welcher Zeit kein Farbstoff mehr nachgewiesen werden kann.

20.2 Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion

Zur Bestimmung der Ableitung der e-Funktion $f: x \mapsto e^x$ betrachtet man den Differenzenquotienten:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot\left(e^h-1\right)}{h}$$

Also:

$$f'(x) = e^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

Probleme macht jetzt nur noch der Term $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$. Da gehen wir nun einfach etwas pragmatisch vor und setzen für h sehr kleine Werte ein.

h	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$\frac{e^h-1}{h}$	1,051719…	1,005016…	1,00050…	1,000500..	1,000050…	1,000005

Es ist unschwer zu erkennen, dass der Term $\frac{e^h-1}{h} \to 1$ für $h \to 0$.

Also folgt: $f'(x) = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1} = e^x$

Ableitung der e-Funktion:
Für die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^x$ gilt: $f'(x) = e^x$

Das ist schon bemerkenswert, dass die e-Funktion abgeleitet wieder die e-Funktion ergibt!

20.3 Ableitungsregeln

Doch wie leitet man nun eine e-Funktion allgemein ab? Dazu gilt folgende Ableitungsregel:

Kettenregel (Regel des Nachdifferenzierens):
Ist die Funktion f mit $f(x) = e^{g(x)}$ gegeben, wobei $g(x)$ eine Funktion ist, die differenzierbar ist. Dann gilt für die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

Beispiel 1 : Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^{3x}$
Für die Funktion g (im Exponenten der e-Funktion) gilt: $g(x) = 3x$ mit der Ableitung $g'(x) = 3$
Somit folgt für die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$$

Beispiel 2 : Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^{-x^2}$
Für die Funktion g (im Exponenten der e-Funktion) gilt: $g(x) = -x^2$ mit der Ableitung $g'(x) = -2x$
Somit folgt für die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

Aufgaben:

8. Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion f.
   a) $f(x) = e^{3x}$
   b) $f(x) = e^{\frac{2}{7}x}$
   c) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$
   d) $f(x) = e^{1-x}$
   e) $f(x) = 2e^{x} - 2$
   f) $f(x) = e^{2x-2} - 2$
   g) $f(x) = e^{-\frac{1}{4}x+1}$

Produktregel (1. Version):
Ist die Funktion f mit $f(x) = u(x)e^x$ gegeben, wobei $u(x)$ eine Funktion ist, die differenzierbar ist. Dann gilt für die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = u'(x) \cdot e^x + u(x) \cdot e^x$$

Beispiel 3: Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot e^x$
Für die Funktion u gilt: $u(x) = 3x$ mit der Ableitung $u'(x) = 3$
Somit folgt für die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = 3 \cdot e^x + 3x \cdot e^x$$

Der Term lässt sich dann noch faktorisieren:

$$f'(x) = (3 + 3x) \cdot e^x$$

Beispiel 4: Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = -x^2 \cdot e^x$
Für die Funktion u gilt: $u(x) = -x^2$ mit der Ableitung $u'(x) = -2x$
Somit folgt für die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = -2x \cdot e^x + \left(-x^2\right) \cdot e^x$$

Auch dieser Term lässt sich wieder faktorisieren:

$$f'(x) = -2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x$$

$$f'(x) = \left(-2x - x^2\right) \cdot e^x$$

Aufgaben:

9. Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f und faktorisieren Sie den Term so weit wie möglich.
   a) $f(x) = x \cdot e^x$
   b) $f(x) = (3x - 1) \cdot e^x$
   c) $f(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x$
   d) $f(x) = \left(x^3 - x\right) \cdot e^x$
   e) $f(x) = \left(x^3 - x^2 + 2x - 1\right) \cdot e^x$
   f) $f(x) = e^{-2x} \cdot e^x$
   g) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 - 2x} \cdot e^x$

Produktregel (allgemeine Version):
Ist die Funktion f mit $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ gegeben, wobei $u(x)$ und $v(x)$ Funktionen sind, die differenzierbar sind. Dann gilt für die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

Beispiel 5: Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x)=3x\cdot e^{2x}$
Es gilt:

$$u(x)=3x \quad \Rightarrow \quad u'(x)=3$$
$$v(x)=e^{2x} \quad \Rightarrow \quad v'(x)=2\cdot e^{2x}$$

Somit folgt nach obiger Ableitungsregel für die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x)=3\cdot e^{2x}+3x\cdot 2\cdot e^{2x}$$
$$f'(x)=(3+6x)\cdot e^{2x}$$

Bemerkung: Da wir später die Nullstellen der Ableitungsfunktion ermitteln wollen, ist es ratsam den erhaltenen Term so weit wie möglich zu faktorisieren (also einen gemeinsamen Faktor auszuklammern!).

Beispiel 6: Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x)=-x^2\cdot e^{x^2+2x}$
Es gilt:

$$u(x)=-x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x)=-2x$$
$$v(x)=e^{x^2+2x} \quad \Rightarrow \quad v'(x)=(2x+2)\cdot e^{x^2+2x}$$

Somit folgt für die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x)=-2x\cdot e^{x^2+2x}+\left(-x^2\right)\cdot(2x+2)\cdot e^{x^2+2x}$$
$$f'(x)=\left(-2x-2x^3-2x^2\right)\cdot e^{x^2+2x}$$
$$f'(x)=-2x\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot e^{x^2+2x}$$

Beispiel 7: Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\left(e^x-1\right)\cdot\left(e^{-x}+1\right)$

$$f'(x)=e^x\cdot\left(e^{-x}+1\right)+\left(e^x-1\right)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$$
$$f'(x)=1+e^x-1+e^{-x}$$
$$f'(x)=e^x+e^{-x}$$

Aufgaben:

10. Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f und faktorisieren Sie den Term so weit wie möglich.
    a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$
    b) $f(x) = x \cdot e^{x^2}$
    c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$
    d) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{(1-x^2)}$
    e) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{x^2+x}$
    f) $f(x) = (-x^2 + 2x - 1) \cdot e^{x^2+x}$
    g) $f(x) = (x-2)^2 \cdot e^{-x+2}$
    h) $f(x) = (e^x - 1) \cdot (e^x + 2)$
    i) $f(x) = e^{x^2} \cdot (1 - e^{-x})$
    j) $f(x) = e^{-x^2} \cdot (e^x - 1)$