Sei mutig und wage den Schritt in neue Erlebnisse!
Solang du es nicht tust, wirst Du nie wissen,
wie es ist, sondern nur daran denken,
wie es hätte sein können.
(Cécile Riesen)

§ 19 Exponentialfunktionen

Die bisher betrachteten (ganzrationalen) Funktionen setzten sich als Summe, Differenz oder Produkt von Potenzfunktionen zusammen.

Bei den Potenzfunktionen $x \mapsto x^k$ ist die Basis x variabel und der Exponent $k \in \mathbb{N}$ konstant. Doch lässt sich so ohne weiteres auch $k \in \mathbb{R}$ wählen. Terme wie

$$2^{0,2},\ 3^{\sqrt{2}},\ 4^{-\frac{1}{3}},\ 5^{\pi}, ...$$

sind damit bildbar und machen auch Sinn.

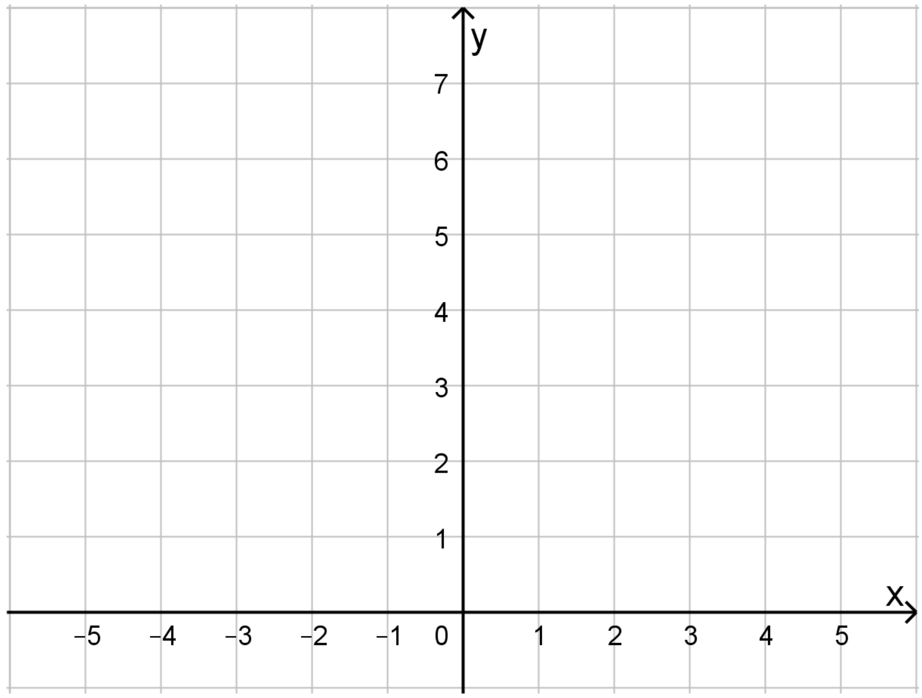
Lässt man nun die Basis b einer Potenz fest und wählt den Exponenten als Variable x, so erhält man:

19.1 Die Exponentialfunktion $f: x \mapsto b^x$

<u>Definition</u>: Es sei $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ fest vorgegeben, dann heißt die Funktion $f: x \mapsto b^x$ Exponentialfunktion zur Basis b.

Zeichnen Sie die Graphen folgender Exponentialfunktion in das auf der nächsten Seite abgebildete Koordinatensystem ein. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für $-5 \leq x \leq 5$ und runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_{1,5}(x) = 1{,}5^x$											
$f_2(x) = 2^x$											
$f_3(x) = 3^x$											
$f_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$											
$f_{\frac{2}{3}}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$											



Für die Exponentialfunktionen gelten dabei folgende Eigenschaften:

- Alle Funktionen haben die Wertemenge $W =]0;\infty[$.
- Alle Funktionsgraphen nähern sich der x-Achse an. Man nennt daher die x-Achse auch die Asymptote des Graphen der Exponentialfunktion.
  (Man sagt auch, dass der Graph die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ besitzt.)
- Ist $b > 1$, so ist der Graph der Exponentialfunktion streng monoton steigend.
  Die Funktion beschreibt damit ein exponentielles Wachstum.
- Ist $0 < b < 1$, so ist der Graph der Exponentialfunktion streng monoton fallend.
  Die Funktion beschreibt damit eine exponentielle Abnahme.
- Spiegelt man den Graph der Funktion $f(x) = b^x$ an der y-Achse, so erhält man den Graph der Funktion $g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$.

Beispiel 1: In kleineren und stark verschmutzten Teichen finden Rotalgen sehr günstige Lebensbedingungen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt (Beobachtungsbeginn $x = 0$) bedecken sie eine Fläche von $1\,m^2$. Bei geeigneten Temperaturen vermehren sie sich täglich um einen Faktor von 1,3.

a) Geben Sie einen Funktionsterm $A(x)$ an, welcher die von den Rotalgen bedeckte Fläche (in m^2) in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit x (in Tagen) beschreibt.

$A(x) = 1{,}3^x$

b) Berechnen Sie, welche Fläche nach einem Tag bedeckt ist und berechnen Sie den prozentualen Zuwachs.

$A(1)=1,3^1=1,3$

Täglicher Zuwachs: $p=\frac{1,3-1}{1}=0,3\ (\hat{=}\,30\%)$

c) Berechnen Sie, welche Fläche nach einer Woche bedeckt ist und berechnen Sie den prozentualen Zuwachs vom 7. auf den 8. Tag.

$A(7)=1,3^7\approx 6,27$

Täglicher Zuwachs: $p=\frac{A(8)-A(7)}{A(7)}=\frac{1,3^8-1,3^7}{1,3^7}=0,3\ (\hat{=}\,30\%)$

Bemerkung: Zwischen der Zuwachsrate p (als Dezimalzahl) und der Basis b der Exponentialfunktion besteht folgender Zusammenhang:

$$b=1+p$$

Ist $b=1,3$, so beträgt die tägliche Zuwachsrate $p=0,3$.

d) Entscheiden Sie, ob nach zwei Wochen ein Teich mit einer Fläche von $40\ m^2$ komplett von Rotalgen bedeckt ist.

$A(14)=1,3^{14}\approx 39,37$

Der Teich wäre somit gerade noch nicht komplett mit Rotalgen bedeckt.

Beispiel 2: Zur Behandlung von kranken Tieren wird diesen $1\,g$ eines Langzeitantibiotikums verabreicht. Die Funktion B mit $B(x)=0,9^x$ beschreibt dabei die Menge an Langzeitantibiotikum, welches noch im Körper des Tieres vorhanden ist.

a) Berechnen Sie, welche Menge des Langzeitantibiotikums nach einem Tag noch vorhanden ist und bestimmen Sie wie viel Prozent am ersten Tag abgebaut wurde.

$B(1)=0,9^1=0,9$

Nach einem Tag sind noch $0,9\ g$ des Langzeitantibiotikums vorhanden.

Tägliche Abnahme: $p=\frac{0,9-1}{1}=-0,1\ (\hat{=}\,10\%)$

Bemerkung: Das Minuszeichen sagt dabei aus, dass es sich um eine Abnahme handelt.

b) Berechnen Sie, welche Menge des Langzeitantibiotikums nach zwei Wochen abgebaut wurden.

$B(14)=0,9^{14}=0,23$

Nach zwei Wochen wurden bereits $0,77\ g$ $(1-0,23=0,77)$ des Langzeitantibiotikums abgebaut.

c) Bestimmen Sie, wie viel Prozent des Langzeitantibiotikums vom 5. auf den 6. Behandlungstag abgebaut werden.

$B(5) = 0{,}9^5 \approx 0{,}59$

$B(6) = 0{,}9^6 \approx 0{,}53$

Prozentuale Abnahme: $p = \dfrac{0{,}9^6 - 0{,}9^5}{0{,}9^5} = -0{,}1 \ (\hat{=}\, 10\%)$

Bemerkung: Ist $b < 1$, so ist (wegen $b = 1 + p$) auch $p < 0$ und gibt somit die Abnahmerate an.

In der Regel ist aber der sogenannte „Startwert“ nicht 1!

19.2 Die allgemeine Exponentialfunktion $\mathbf{f : x \mapsto a \cdot b^x}$

In der Praxis, das heißt in den allermeisten Fällen hat man als sogenannten Startwert (auch Anfangswert) nicht $1\,m^2$ oder $1\,g$ sondern vielleicht $2{,}5\,m^2$ Rotalgen oder $1{,}5\,g$ an Antibiotikum. Dieser Anfangswert a muss dann bei den entsprechenden Rechnungen mitberücksichtigt werden und hat natürlich auch einen bestimmten Einfluss auf den Verlauf des Funktionsgraphen.

Bei einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt:

$$f(0) = a \cdot \underbrace{b^0}_{1} \quad \Rightarrow \quad f(0) = a$$

Der Wert a entspricht somit einem „sogenannten“ Startwert zu/bei $x = 0$.

Mit Hilfe eines solchen Funktionsterms lassen sich z. Bsp. Be- und Entladevorgänge eines Kondensators, aber auch der radioaktive Zerfall, eine Verzinsung, der Luftdruck in einer Höhe h, … beschreiben.

Bei solchen anwendungsbezogenen Aufgaben verwendet man statt der Variablen x eher die Variable t (Zeit).

Funktionen der Form $f : t \mapsto a \cdot b^t$ beschreiben den zeitlichen Verlauf exponentieller Wachstumsprozesse $(b > 1)$ oder Abnahmeprozesse $(0 < b < 1)$. Die Konstante a gibt dabei den Anfangsbestand an.

19.2.1 Wachstumsprozesse

Beispiel 3: Eine Bakterienkultur mit einer Individuenanzahl von 2200 wird in eine Petrischale (nach dem deutschen Bakteriologen *Julius Richard Petri* benannt) auf einen Nährboden gebracht. Nach 4 Stunden ist die Individuenanzahl kontinuierlich auf 23300 gestiegen.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(t)=a\cdot b^t$, der die zeitliche Veränderung der Individuenanzahl in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) angibt.

Der Startwert (bzw. die Anfangsbedingung) kann der Angabe entnommen werden. Es gilt nämlich zum Zeitpunkt $t=0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2200 \\ a\cdot b^0 &= 2200 \\ a &= 2200 \end{aligned}$$

Somit erhält man schon einmal: $f(t)=2200\cdot b^t$

Den Wert für b (da es sich um ein Wachstum handelt, muss $b>0$ sein!) erhält man aus der Information, dass nach 4 Stunden die Individuenanzahl auf 23300 gestiegen ist. Also gilt zum Zeitpunkt $t=4$:

$$\begin{aligned} f(4) &= 23300 \\ 2200\cdot b^4 &= 23300 \quad && |:2200 \\ b^4 &= \frac{23300}{2200} \quad && \text{kürzen!} \\ b^4 &= \frac{233}{22} \quad && |\sqrt[4]{\ldots} \\ b &= \sqrt[4]{\frac{233}{22}} \\ b &\approx 1{,}804 \end{aligned}$$

Somit lautet die Wachstumsfunktion: $f(t)=2200\cdot 1{,}804^t$

Dem Wert $b=1{,}804$ kann die stündliche Zuwachsrate p entnommen werden. Es gilt ja:

$$\begin{aligned} b &= 1+p \\ 1{,}804 &= 1+p \\ p &= 0{,}804 \end{aligned}$$

Konkret heißt das, dass die stündliche die Zuwachsrate 80,4% beträgt.

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt T, zu dem sich die anfängliche Individuenanzahl verdoppelt hat.

Gesucht ist also der Zeitpunkt T zu dem gilt: $f(T) = 2 \cdot a$

$$\begin{aligned}
f(T) &= 2 \cdot 2200 \\
2200 \cdot 1{,}804^T &= 4400 \qquad &|:2200 \\
1{,}804^T &= 2 \qquad &|\ln(...) \\
\ln\left(1{,}804^T\right) &= \ln(2) \\
T \cdot \ln(1{,}804) &= \ln(2) \qquad &|:\ln(1{,}804) \\
T &= \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}804)} \\
T &\approx 1{,}175
\end{aligned}$$

Nach einer Zeit von $T = 1{,}175$ (Stunden) hat sich die Anfangsanzahl verdoppelt. Diese Zeit nennt man auch Verdopplungszeit.
(Das sind 1 Stunde 10 Minuten und 29 Sekunden!)

Anmerkungen:

- Die Verdopplungszeit ist übrigens vom Startzeitpunkt unabhängig. D.h. immer wenn eine Zeit von 1,175 Stunden verstrichen ist, hat sich die ursprüngliche Individuenanzahl verdoppelt.
- Für die Verdopplungszeit verwendet man auch oft die Bezeichnungen T_V oder t_V.

Aufgaben:

1.0 Eine Bakterienkultur von 3800 Individuen wurde um 9.00 Uhr sich selbst überlassen. Um 13.00 Uhr umfasste sie bereits 31500 Bakterien.
1.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm mit welchem das (exponentielle) Wachstum beschrieben werden kann.
1.2 Berechnen Sie Die Bakterienanzahl um 11.00 Uhr, 14.30 Uhr und um 16.00 Uhr.
1.3 Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt 12000 Bakterien vorhanden sind?
1.4 Bestimmen Sie die Zeitspanne innerhalb welcher sich die zu Beginn vorhandene Bakterienanzahl verdoppelt.
1.5 Wie lange dauert es, bis die Bakterienanzahl von 10000 auf 20000 angewachsen ist?

2.0 Wird ein Anfangskapital K_0 mit Zinseszinsen angelegt, so werden die jährlich anfallenden Zinsen dem Kapital zugeschlagen und mitverzinst.
Legt man ein Anfangskapital K_0 zu p Prozent mit Zinseszinsen an, so gilt für das Kapital $K(t)$ nach t Jahren:

$$K(t) = K_0 \cdot \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^t$$

2.1 Ein Kapital von 2.000 € wird zu einem Zinssatz von 3,5% angelegt. Berechnen Sie, wie groß das Kapital nach 5 Jahren ist.
2.2 Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren das Kapital auf 5.060 € angewachsen ist.
2.3 Ermitteln Sie nach welcher Zeit sich das Anfangskapital verdoppelt hat.

3. Bestimmen Sie, zu welchem Zinssatz ein Kapital von 2.000 € angelegt werden müsste, so dass nach 10 Jahren das Kapital auf 3.200 € angewachsen ist.

4. Berechnen Sie, wie hoch das Anfangskapital K_0 sein müsste, wenn es bei einem Zinssatz von 5,5% in 15 Jahren auf 10.000 € anwachsen soll?

5. Zwei Freunde legen zum selben Zeitpunkt Geld bei einer Bank auf ein Sparbuch mit Zinseszinsen an. Der eine legt bei der A-Bank 10.000 € zu 5% an, der andere bei der B-Bank 8.000 € zu 6%. Berechnen Sie, nach welcher Zeit die beiden Freunde gleiches Sparguthaben haben.

6. Die Einwohnerzahl Afrikas im Jahre 1991 betrug etwa 710 Mio. Im Jahr 2001 rechneten man dort meiner einer Bevölkerung von 948 Mio. Ermitteln Sie um wie viel Prozent die Bevölkerung jährlich zugenommen hat, wenn man von exponentiellem Wachstum ausgeht.

7.0 Im Jahre 1975 gab es auf der Erde 4,0 Milliarden Menschen. Man rechnet mit einer Verdopplungszeit der Erdbevölkerung von etwa 40 Jahren.
7.1 Stellen Sie die Wachstumsfunktion ab 1975 auf, wenn exponentielles Wachstum angenommen wird.
7.2 Bestimmen Sie, welche Bevölkerungszahlen sich für 1990, für 2000 und für heute ergeben?
Ist das angenommene Modell realistisch?

19.2.2 Zerfallsprozesse

Beispiel 4: Der Luftdruck beträgt auf Meereshöhe 1013 hPa. In einer Höhe von $2{,}1\,\text{km}$ herrscht noch ein Luftdruck von 780 hPa.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(h) = a \cdot b^h$, der den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe h (in km) angibt.

Der Startwert (bzw. die Anfangsbedingung) kann der Angabe entnommen werden. Es gilt nämlich zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\begin{aligned} p(0) &= 1013 \\ a \cdot b^0 &= 1013 \\ a &= 1013 \end{aligned}$$

Somit erhält man schon einmal: $p(h) = 1013 \cdot b^h$

Den Wert für b (da es sich um eine Abnahme handelt, muss $b < 0$ sein!) erhält man aus der Information, dass in einer Höhe von $2{,}1\,\text{km}$ ein Luftdruck von 780 hPa herrscht. Also gilt in der Höhe $h = 2{,}1$:

$$\begin{aligned} p(2{,}1) &= 780 \\ 1013 \cdot b^{2{,}1} &= 780 && |:1013 \\ b^{2{,}1} &= \frac{780}{1013} && |\sqrt[2{,}1]{\ldots} \\ b &= \sqrt[2{,}1]{\frac{780}{1013}} \\ b &\approx 0{,}883 \end{aligned}$$

Somit lautet die Abnahmefunktion: $p(h) = 1013 \cdot 0{,}883^h$

Dem Wert $b = 0{,}883$ kann die Abnahmerate p (pro km) entnommen werden. Es gilt ja:

$$\begin{aligned} b &= 1 + p \\ 0{,}883 &= 1 + p \\ p &= -0{,}117 \end{aligned}$$

Konkret heißt das, dass sich der Luftdruck pro km Höhe um 11,7% verringert.

b) Bestimmen Sie die Höhe H, in welcher der Luftdruck auf die Hälfte abgefallen ist.

Gesucht ist also die Höhe H, in der gilt: $p(H) = \frac{1}{2} \cdot a$

$$\begin{aligned} p(H) &= \tfrac{1}{2} \cdot 1013 \\ 1013 \cdot 0{,}883^H &= \tfrac{1}{2} \cdot 1013 && |:1013 \\ 0{,}883^H &= \tfrac{1}{2} && |\ln(\ldots) \\ \ln\left(0{,}883^H\right) &= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ H \cdot \ln(0{,}883) &= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) && |:\ln(0{,}883) \\ H &= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0{,}883)} \\ H &\approx 5{,}571 \end{aligned}$$

In der einer Höhe von 5571 Meter hat sich der Luftdruck halbiert. Man nennt diese Höhe auch die Halbwertshöhe.

Anmerkungen:

- Die Halbwertshöhe ist übrigens vom Luftdruck auf Meereshöhe unabhängig. D.h. immer wenn ein Höhenunterschied von 5571 Metern überwunden ist, hat sich der Luftdruck halbiert.
- Bei Abnahmevorgängen oder auch Zerfallsprozessen hat man häufig eine von der Zeit t abhängige Größe. Dann nennt man die Zeit, in welcher der Anfangsbestand auf die Hälfte gesunken ist, die sogenannten Halbwertszeit.
  (Das hat man vor allem bei radioaktiven Zerfällen!)
- Für die Halbwertszeit verwendet man auch oft die Bezeichnungen T_H oder t_H.

Aufgaben:

8.0 Ein Körper mit einer Temperatur von 300°C wird zum Abkühlen in einen Raum mit der gleich bleibenden Temperatur 0°C gebracht. Innerhalb einer Stunde sinkt die Temperatur jeweils um 40% ihres Wertes zu Beginn der jeweiligen Stunde.
Mit $f(t)$ bezeichnen wir die Temperatur des Körpers nach t Stunden.

8.1 Geben Sie die Funktion $f(t)$ an.

8.2 Bestimmen Sie, nach welcher Zeit die Temperatur auf 100°C bzw. Raumtemperatur (20°C) abgesunken ist?

8.3 Ermitteln Sie die Halbwertszeit dieses Abkühlvorgangs.

9.0 In einem (klaren) Bergsee nimmt die Lichtintensität pro Zentimeter Wassertiefe um 2,4% ab. Zur Mittagszeit wird in diesem Bergsee in einer Tiefe von 82 Zentimeter eine Lichtstärke von 11789 Lux gemessen.

9.1 Berechnen Sie die Lichtintensität unmittelbar an der Wasseroberfläche.

9.2 Ermitteln Sie die Halbwertstiefe.

9.3 Bestimmen Sie in welcher Tiefe die Lichtintensität einen Wert von 1000 Lux besitzt.

10. Bei einer Schilddrüsenuntersuchung wird einem Patienten radioaktives Jod mit einer Halbwertszeit von 8 Tagen verabreicht. Bestimmen Sie, wie viel Prozent des verabreichten Jodisotops der Patient nach 3 Wochen höchstens in seinem Körper hat.

11.0 In der Atmosphäre kommt neben dem stabilen Kohlenstoffisotop ^{12}C in sehr geringer Konzentration das radioaktive Isotop ^{14}C vor. Dieses Isotop zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5.730 Jahren. Die Konzentration von ^{14}C in der Atmosphäre bleibt gleich, weil es durch die kosmische Strahlung ständig neu gebildet wird.
Pflanzen nehmen ständig Kohlenstoffdioxid CO_2 aus der Luft auf und bauen den Kohlenstoff in ihr Gewebe ein. Dabei gelangt auch der radioaktive Kohlenstoff ^{14}C in das Gewebe, und zwar entsprechend seinem Anteil am atmosphärischen Kohlenstoff. Jedes Gramm Kohlenstoff, das aus einer Probe einer lebenden Pflanze gewonnen wird enthält $N_0 = 6{,}0 \cdot 10^{10}$ ^{14}C-Atome. Nach dem Absterben der Pflanzen hört die Aufnahme von Kohlenstoff auf. Von diesem Augenblick an verringert sich die Menge des Isotops ^{14}C, die in der Pflanze enthalten ist.

11.1 Der Zerfall des Isotops ^{14}C kann durch die Funktion N mit $N(t) = N_0 \cdot b^t$ beschrieben werden. Bestimmen Sie den Wert für b.

11.2 In einem Pharaonengrab fand man einen Balken aus Zypressenholz. Aus einer Probe konnte dabei 1 Milligramm Kohlenstoff gewonnen werden. In diesem wurde $3{,}36 \cdot 10^7$ ^{14}C-Atome gezählt. Berechnen Sie das Alter des Grabs.

11.3 Über Nahrungsketten gelangt der radioaktive Kohlenstoff auch in tierisches Gewebe. Bestimmen Sie das Alter eines Knochens, in dem der ^{14}C-Anteil nur noch 73,9% des ursprünglichen Anteils ausmacht.

12.0 Die Glastür eines Mikrowellenherdes soll die (elektromagnetische) Strahlung aus dem Inneren dämpfen. Je nach Glasdicke ergeben sich unterschiedliche Dämpfungswerte S in %.

d in mm	1	2	3
S in %	33	11	3,67

12.1 Stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Glasdicke d und dem Dämpfungsfaktor S in einer Formel dar.

12.2 Laut Gesetzgeber darf maximal 1% der Strahlung durch die Tür austreten. Ermitteln Sie, welche Dicke die Glastür mindestens haben muss.

19.3 Exponentialfunktionen der Form $\mathbf{f : x \mapsto a \cdot b^{c\cdot(x-d)} + y_0}$

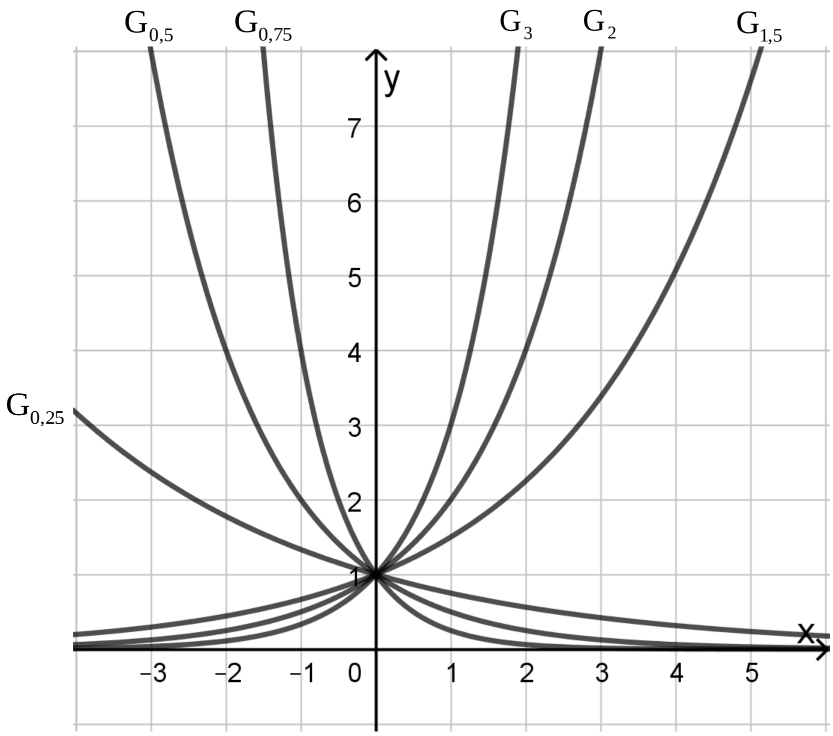
Da wir nun schon bereits in anwendungsorientierten Aufgaben Exponentialfunktionen kennen gelernt und mit ihnen gearbeitet haben, wollen wir nun den Verlauf solcher Funktionen, die in noch etwas allgemeinerer Form gegeben sind, untersuchen.

19.3.1 Einfluss des Parameters b

In 19.1 haben wir schon gesehen, dass der Wert von b einen Einfluss auf den Verlauf des Graphen der Funktion besitzt. Ist nämlich $b > 1$, so steigt der Graph (Zunahme/Wachstum) und für $0 < b < 1$ fällt der Graph (Abnahme/Zerfall).

Gegeben sind die Funktionen $f_{0,25}$, $f_{0,5}$, $f_{0,75}$, $f_{1,5}$, f_2 und f_3 deren Graph in folgender Graphik eingezeichnet ist.

$f_{0,25}(x) = 0,25^x$
$f_{0,5}(x) = 0,5^x$
$f_{0,75}(x) = 0,75^x$
$f_{1,5}(x) = 1,5^x$
$f_2(x) = 2^x$
$f_3(x) = 3^x$



Dabei gilt für $0 < b < 1$:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_b(x) \to \infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} f_b(x) = 0$
  Das heißt, dass sich der Funktionsgraph der x-Achse (asymptotisch) nähert.
  Die Graphen besitzen die (waagrechte) Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.
- Je kleiner der Wert von b, desto flacher verläuft der Graph der Funktion f.

Für $b > 1$ gilt:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_b(x) = 0$
  Die Graphen besitzen die (waagrechte) Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f_b(x) \to \infty$
- Je größer der Wert von b, desto steiler verläuft der Graph der Funktion f.

Außerdem gilt: Den Graph der Funktion $f_{0,5}$ erhält man, wenn man den Graph der Funktion f_2 an der y-Achse spiegelt.

19.3.2 Einfluss des Parameters a

Wir wollen nun den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des Graphen der Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot 2^x$ untersuchen (wir legen dabei $b = 2$ als Wert für die Basis fest).

Als Grundfunktion nehmen wir die Funktion $f_1(x) = 2^x$ mit $a = 1$.

In folgender Graphik sind die Funktion f_1, $f_{1,5}$, f_3, $f_{0,5}$, $f_{0,75}$, $f_{-0,75}$ und f_{-3} eingezeichnet.

$f_1(x) = 1 \cdot 2^x$

$f_{1,5}(x) = 1{,}5 \cdot 2^x$

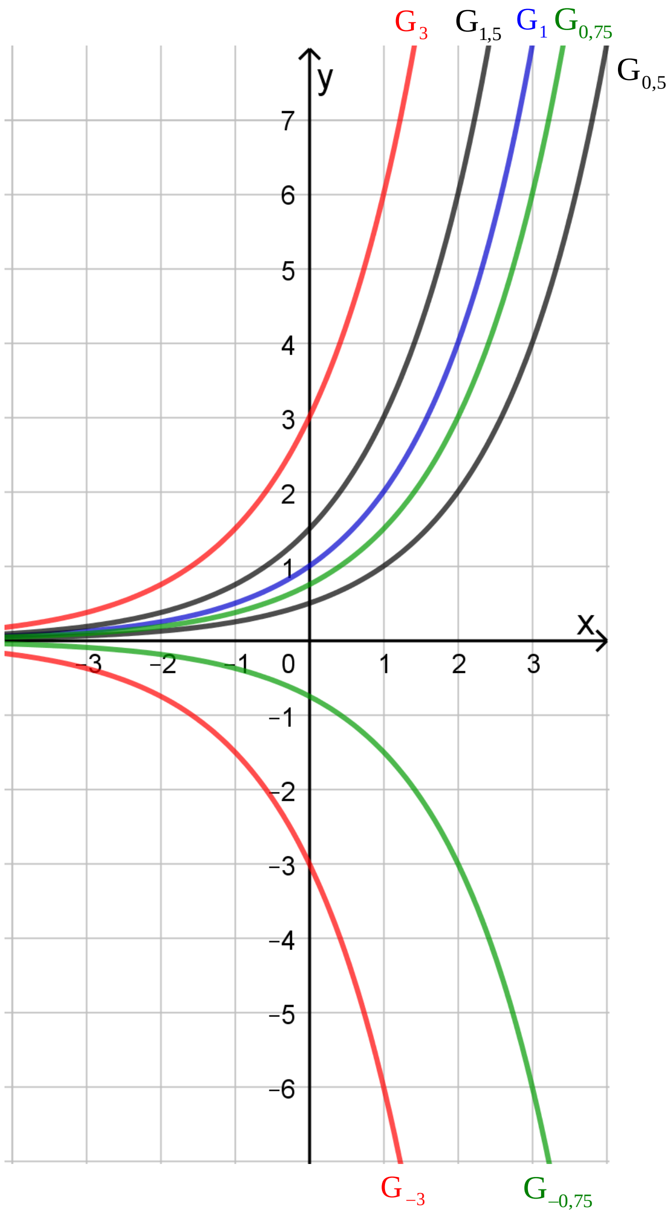
$f_3(x) = 3 \cdot 2^x$

$f_{0,5}(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$

$f_{0,75}(x) = 0{,}75 \cdot 2^x$

$f_{-3}(x) = -3 \cdot 2^x$

$f_{-0,75}(x) = -0{,}75 \cdot 2^x$



Betrachtet man die Funktionsgraphen mit positivem a $(a > 0)$, so stellt man fest, dass sie alle streng monoton steigend verlaufen.

Ist a negativ $(a < 0)$ so verlaufen die Funktionsgraphen streng monoton fallend.

Man stellt außerdem fest, dass der Graph der Funktion f_3 und der Graph der Funktion f_{-3} bezüglich der x-Achse spiegelsymmetrisch sind. Man kann sagen: Spiegelt man den Graph der Funktion f_3 an der x-Achse, so erhält man den Graph der Funktion f_{-3}. (Gleiches gilt für die Graphen der Funktionen $f_{0,75}$ und $f_{-0,75}$)

Vergleicht man die Funktionsgraphen mit $a > 0$ untereinander, so stellt man fest, dass mit größer werdendem Wert von a der Graph zunehmend steiler nach oben verläuft.

Mathematisch ausgedrückt sagt man, dass der Graph der Funktion f_3 gegenüber dem Graph der Funktion f_1 um den Faktor 3 in y-Richtung gestreckt ist.

Allgemein gilt: Bei der Funktion $f_a(x) = a \cdot b^x$ mit $a > 0$ gibt der Wert von a den sogenannten Streckfaktor in y-Richtung an. Der Graph wird also gegenüber dem Graph der Funktion $f_1(x) = 1 \cdot b^x$ um den Faktor a in y-Richtung gestreckt.
(Geometrisch gesehen ist das für $a > 1$ auch eine Streckung des Graphen. Für $0 < a < 1$ ist es geometrisch aber eine Stauchung.)
Ist $a < 0$, so muss man den Graph noch zusätzlich an der x-Achse spiegeln.

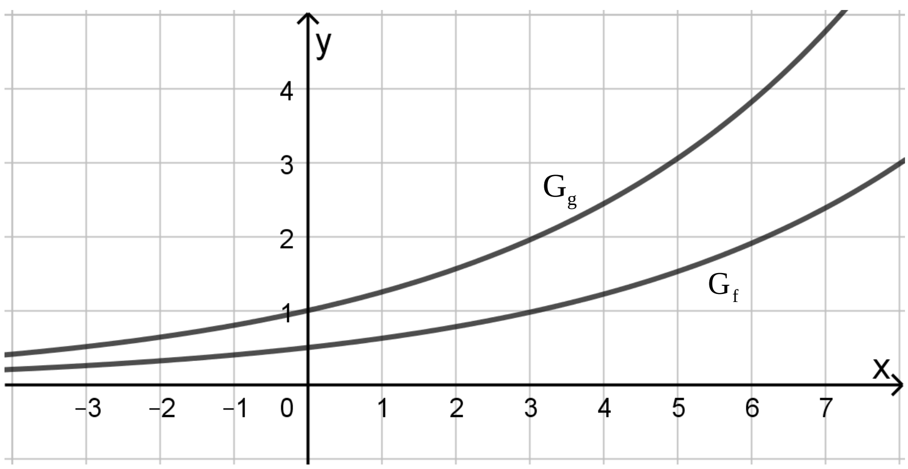
Beispiel 1: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot 1{,}5^x$ aus dem Graph der Funktion g mit $g(x) = 1{,}5^x$ hervorgeht.

Wird der Graph der Funktion g um den Faktor 3 in y-Richtung gestreckt, so erhält man den Graphen der Funktion f.

Beispiel 2: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot 1{,}5^x$ aus dem Graph der Funktion g mit $g(x) = 1{,}5^x$ hervorgeht.

Streckt man den Graphen der Funktion g um den Faktor 2 in y-Richtung und spiegelt diesen an der x-Achse, so erhält man den Graphen der Funktion f.

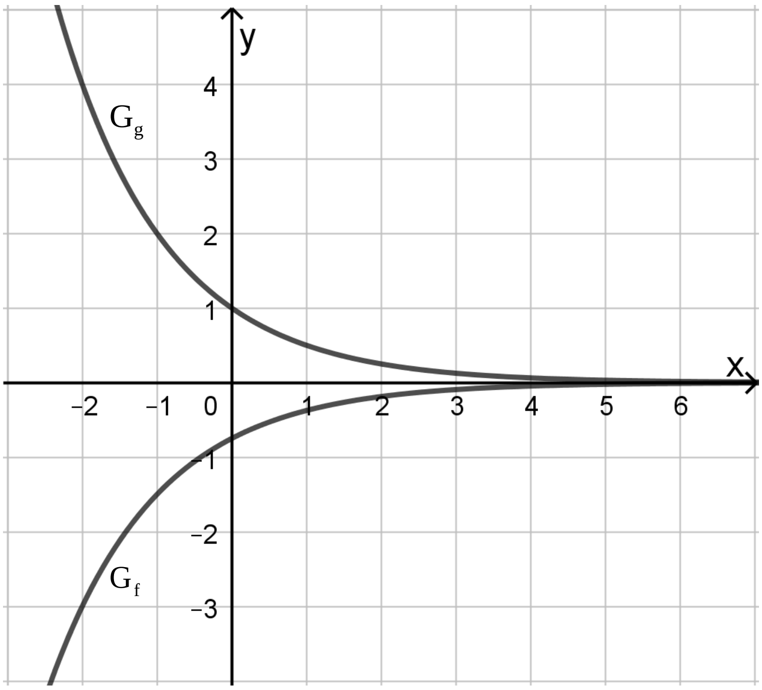
Beispiel 3: Gegeben ist der Graph der Funktion g mit $g(x) = 1{,}25^x$. Erklären Sie, wie der abgebildete Graph der Funktion f aus dem Graph der Funktion g hervorgeht und geben Sie den Funktionsterm $f(x)$ an.



Den Graphen der Funktion f erhält man durch eine Streckung des Graphen der Funktion g um den Faktor 0,5 an der y-Achse. Somit gilt: $f(x) = 0{,}5 \cdot 1{,}25^x$

Bemerkung: Statt einer Streckung um den Faktor 0,5 sagt man auch eine Stauchung um den Faktor 2 $\left(\frac{1}{0{,}5}=2\right)$

Beispiel 4: Gegeben ist der Graph der Funktion g mit $g\left(x\right)=0{,}5^{x}$. Geben Sie den Funktionsterm von f mit $f\left(x\right)=a\cdot b^{x}$ an.



Der Graph der Funktion g muss um den Faktor 0,75 an der y-Achse getreckt und dann noch an der x-Achse gespiegelt werden. Somit gilt: $f\left(x\right)=-0{,}75\cdot 0{,}5^{x}$

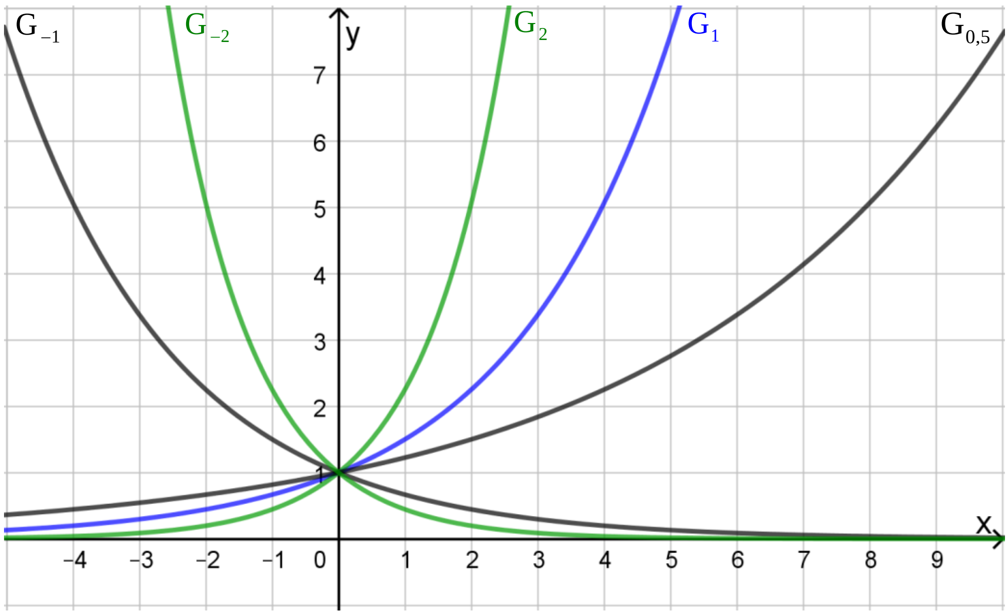
19.3.3 Einfluss des Parameters c

Wir wollen nun den Einfluss des Parameters c auf den Verlauf des Graphen der Funktion f_c mit $f_c(x) = 1{,}5^{c \cdot x}$ untersuchen (wir legen dabei $b = 1{,}5$ als Wert für die Basis fest).

Als Grundfunktion nehmen wir die Funktion $f_1(x) = 1{,}5^{1 \cdot x}$ mit $c = 1$.

In folgender Graphik sind die Funktion f_1, f_2, $f_{0,5}$, f_{-1} und f_{-2} eingezeichnet.

$f_1(x) = 1{,}5^{x}$
$f_2(x) = 1{,}5^{2x}$
$f_{0,5}(x) = 1{,}5^{0,5x}$
$f_{-1}(x) = 1{,}5^{-x}$
$f_{-2}(x) = 1{,}5^{-2x}$



Betrachtet man die Funktionsgraphen mit positivem c $(c > 0)$, so stellt man fest, dass sie alle streng monoton steigend verlaufen.

Ist c negativ $(c < 0)$ so verlaufen die Funktionsgraphen streng monoton fallend.

Man stellt außerdem fest, dass der Graph der Funktion f_2 und der Graph der Funktion f_{-2} bezüglich der y-Achse spiegelsymmetrisch sind. Man kann sagen: Spiegelt man den Graph der Funktion f_2 an der y-Achse, so erhält man den Graph der Funktion f_{-2}. (Gleiches gilt für die Graphen der Funktionen f_1 und f_{-1})

Vergleicht man die Funktionsgraphen mit $c > 0$ untereinander, so stellt man fest, dass mit größer werdendem Wert von c der Graph zunehmend steiler nach oben verläuft.
Mathematisch ausgedrückt sagt man hier, dass der Graph der Funktion f_2 gegenüber dem Graph der Funktion f_1 um den Faktor 2 in x-Richtung gestaucht ist. Der Graph der Funktion $f_{0.5}$ ist um den Faktor 0,5 in x-Richtung gestaucht! Da sagt man aber auch eher er ist in x-Richtung um den Faktor 2 $\left(\frac{1}{0{,}5} = 2\right)$ gestreckt.

Allgemein gilt: Bei der Funktion $f_c(x) = b^{c \cdot x}$ mit $c > 0$ gibt der Wert von c den sogenannten Stauchfaktor in x-Richtung an. Der Graph wird also gegenüber dem Graph der Funktion $f_1(x) = b^{1 \cdot x}$ um den Faktor c in x-Richtung gestaucht.
Geometrisch gesehen ist das für $c > 1$ auch eine Stauchung des Graphen. Für $0 < c < 1$ ist es

geometrisch aber eine Streckung.
Ist $c<0$, so muss man den Graph noch zusätzlich an der y-Achse spiegeln.

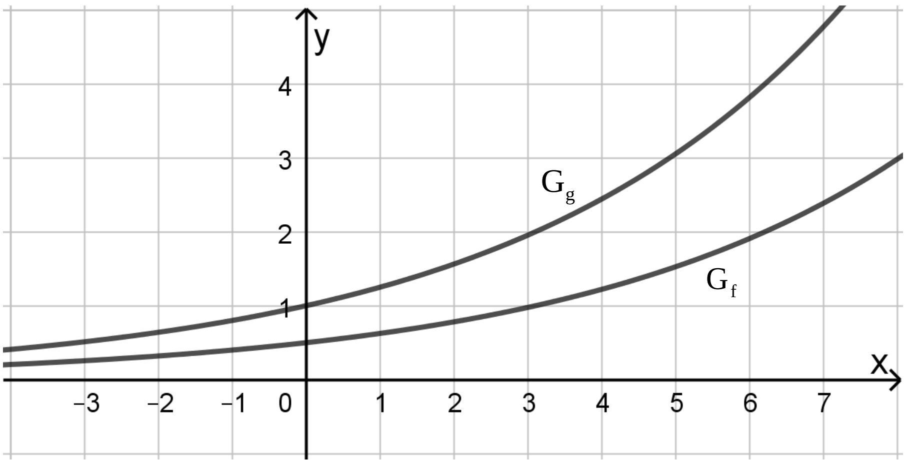
Beispiel 1: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x)=1{,}5^{4\cdot x}$ aus dem Graph der Funktion g mit $g(x)=1{,}5^{x}$ hervorgeht.

Wird der Graph der Funktion g um den Faktor 4 in x-Richtung gestaucht, so erhält man den Graphen der Funktion f.

Beispiel 2: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x)=1{,}5^{-\frac{1}{3}x}$ aus dem Graph der Funktion g mit $g(x)=1{,}5^{x}$ hervorgeht.

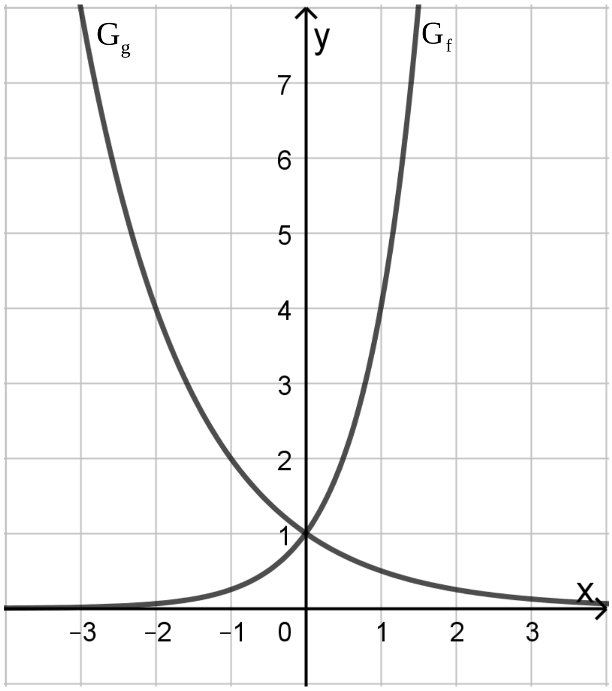
Streckt man den Graphen der Funktion g um den Faktor 3 in x-Richtung und spiegelt diesen an der y-Achse, so erhält man den Graphen der Funktion f.

Beispiel 3: Gegeben ist der Graph der Funktion g mit $g(x)=1{,}25^{x}$. Erklären Sie, wie der abgebildete Graph der Funktion f aus dem Graph der Funktion g hervorgeht und geben Sie den Funktionsterm $f(x)$ an.



Den Graphen der Funktion f erhält man durch eine Streckung des Graphen der Funktion g um den Faktor 2 an der x-Achse. Statt einer Streckung um den Faktor 2 sagt man auch eine Stauchung um den Faktor 0,5 $\left(\frac{1}{2}=0{,}5\right)$. Somit gilt: $f(x)=1{,}25^{0{,}5\cdot x}$

Beispiel 4: Gegeben ist der Graph der Funktion g mit $g(x) = 0{,}5^{x}$. Geben Sie den Funktionsterm von f mit $f(x) = b^{c \cdot x}$ an.



Der Graph der Funktion g muss um den Faktor 2 an der x-Achse gestaucht und dann noch an der y-Achse gespiegelt werden. Somit gilt: $f(x) = 0{,}5^{-2x}$.

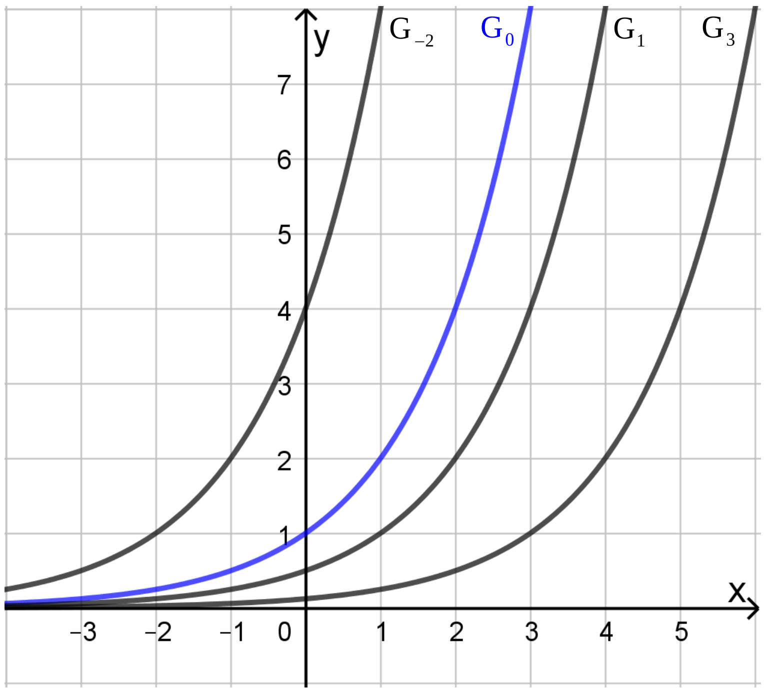
19.3.4 Einfluss des Parameters d

Wir wollen nun den Einfluss des Parameters d auf den Verlauf des Graphen der Funktion f_d mit $f_d(x) = 2^{x-d}$ untersuchen (wir legen dabei $b = 2$ als Wert für die Basis fest).

Als Grundfunktion nehmen wir die Funktion $f_0(x) = 2^x$ mit $d = 0$.

In folgender Graphik sind die Funktion f_0, f_1, f_3, und f_{-2} eingezeichnet.

$f_0(x) = 2^x$
$f_1(x) = 2^{x-1}$
$f_3(x) = 2^{x-3}$
$f_{-2}(x) = 2^{x+2}$



Betrachtet man die Funktionsgraphen, so stellt man fest, dass sie alle „gleich steil" verlaufen. Aber es fällt auf, dass sie gegenüber der Grundfunktion nach links oder nach rechts verschoben sind.

Ist $d > 0$ so ist der Graph um d Einheiten nach rechts verschoben. Ist $d < 0$, so ist der Graph um die entsprechende Anzahl $(\text{Betrag von } d)$ nach links verschoben.

Allgemein gilt: Bei der Funktion $f_d(x) = b^{x-d}$ gibt der Wert von d an um wie viele Einheiten der Graph der Funktion nach links $(d < 0)$ oder nach rechts $(d > 0)$ verschoben wird.

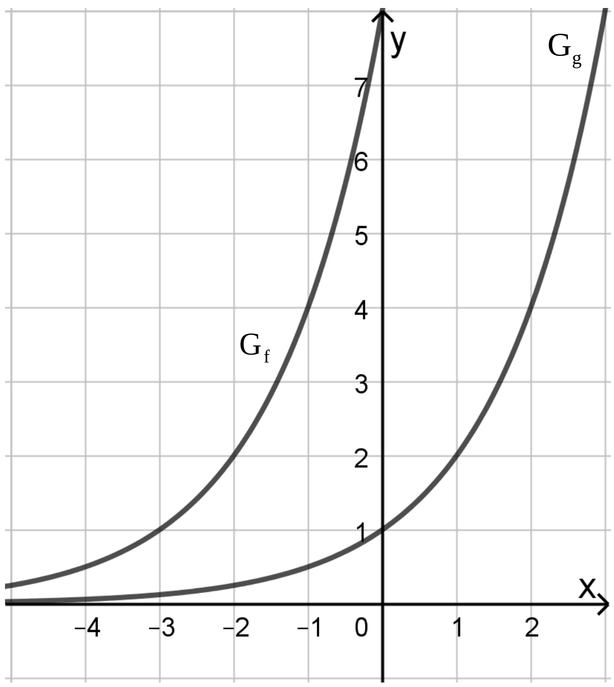
Beispiel 1: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1{,}5^{x-2{,}5}$ aus dem Graph der Funktion g mit $g(x) = 1{,}5^x$ hervorgeht.

Wird der Graph der Funktion g um 2,5 Einheiten nach rechts verschoben, so erhält man den Graphen der Funktion f.

Beispiel 2: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x)=1{,}5^{x+1}$ aus dem Graph der Funktion g mit $g(x)=1{,}5^{x}$ hervorgeht.

Verschiebt man den Graphen der Funktion g um eine Einheit nach links, so erhält man den Graphen der Funktion f.

Beispiel 3: Gegeben ist der Graph der Funktion g mit $g(x)=2^{x}$. Erklären Sie, wie der abgebildete Graph der Funktion f aus dem Graph der Funktion g hervorgeht und geben Sie den Funktionsterm $f(x)$ an.



Den Graphen der Funktion f erhält man durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion g um drei Einheiten nach links. Somit gilt: $f(x)=2^{x+3}$

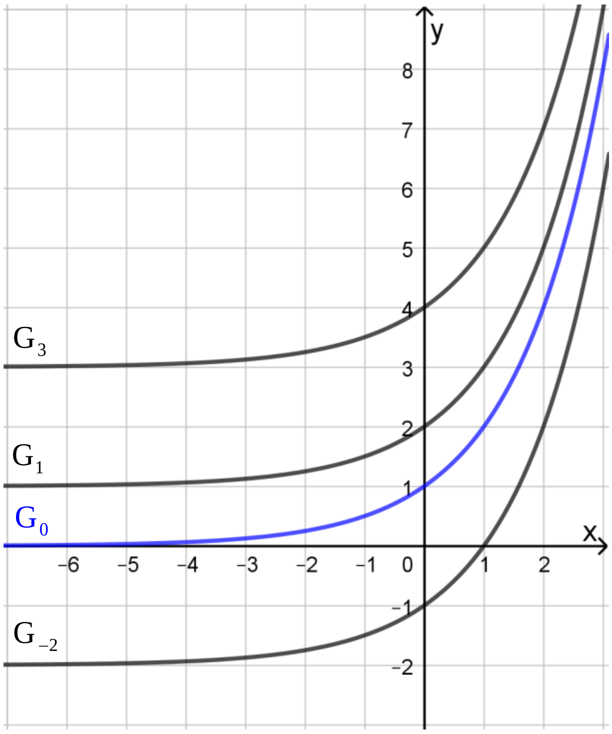
19.3.4 Einfluss des Parameters y_0

Wir wollen nun den Einfluss des Parameters y_0 auf den Verlauf des Graphen der Funktion f_{y_0} mit $f_{y_0}(x)=2^x+y_0$ untersuchen (wir legen dabei $b=2$ als Wert für die Basis fest).

Als Grundfunktion nehmen wir die Funktion $f_0(x)=2^x$ mit $y_0=0$.

In folgender Graphik sind die Funktion f_0, f_1, f_3, und f_{-2} eingezeichnet.

$f_0(x)=2^x$
$f_1(x)=2^x+1$
$f_3(x)=2^x+3$
$f_{-2}(x)=2^x-2$



Betrachtet man die Funktionsgraphen, so stellt man fest, dass sie alle „gleich steil“ verlaufen. Aber es fällt auf, dass sie gegenüber der Grundfunktion nach oben oder nach unten verschoben sind.

Ist $y_0>0$ so ist der Graph um y_0 Einheiten nach oben verschoben. Ist $y_0<0$, so ist der Graph um die entsprechende Anzahl (Betrag von y_0) nach unten verschoben.

Allgemein gilt: Bei der Funktion $f_{y_0}(x)=b^x+y_0$ gibt der Wert von y an um wie viele Einheiten der Graph der Funktion nach oben $(y_0>0)$ oder nach unten $(y_0<0)$ verschoben wird. Die Gerade mit der Gleichung $y=y_0$ ist dabei waagrechte Asymptote des Graphen der Funktion f_{y_0}.

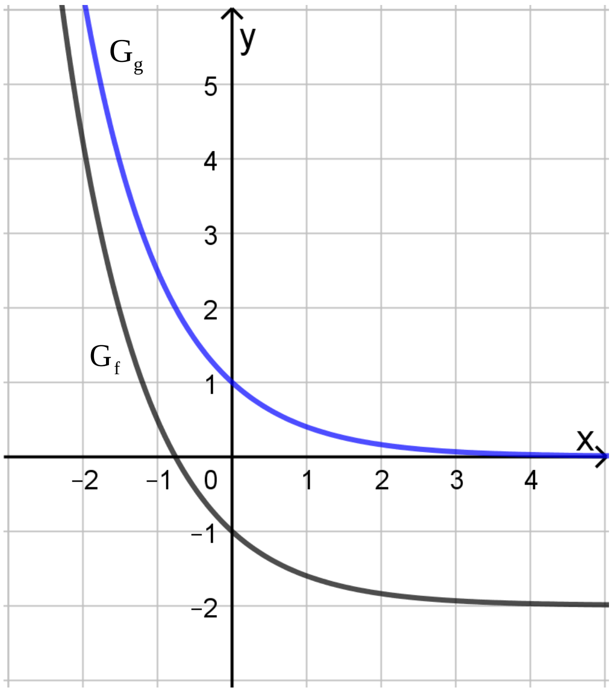
Beispiel 1: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x)=1{,}5^x+2{,}5$ aus dem Graph der Funktion g mit $g(x)=1{,}5^x$ hervorgeht.

Wird der Graph der Funktion g um 2,5 Einheiten nach oben verschoben, so erhält man den Graph der Funktion f.
Bemerkung: Der Graph der Funktion f hat die waagrechte Asymptote $y=2{,}5$.

Beispiel 2: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x)=1{,}5^x-1$ aus dem Graph der Funktion g mit $g(x)=1{,}5^x$ hervorgeht.

Verschiebt man den Graphen der Funktion g um eine Einheit nach unten, so erhält man den Graphen der Funktion f.
Der Graph der Funktion f hat die waagrechte Asymptote $y=-1$

Beispiel 3: Gegeben ist der Graph der Funktion g mit $g(x)=0{,}4^x$. Erklären Sie, wie der abgebildete Graph der Funktion f aus dem Graph der Funktion g hervorgeht und geben Sie den Funktionsterm $f(x)$ an.

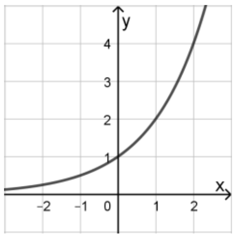
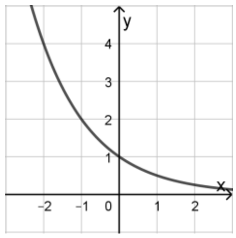
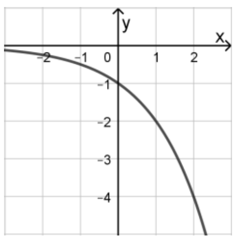
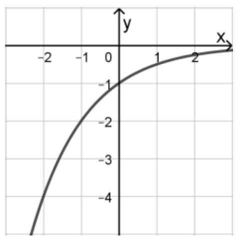


Den Graphen der Funktion f erhält man durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion g um zwei Einheiten nach unten. Somit gilt: $f(x)=0{,}4^x-2$

19.3.5 Einfluss aller Parameter

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Parameter der allgemeinen Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^{c\cdot(x-d)} + y_0$ den Funktionsgraphen (im Vergleich zur Funktion g mit $g(x) = b^x$) wie folgt beeinflussen:

- y_0 verschiebt entlang der y-Achse
- d verschiebt entlang der x-Achse
- a und c haben Einfluss auf Steigung (Stauchung/Streckung) und Spiegelung

	$c > 0$	$c < 0$ (Spiegelung an der y-Achse)
$a > 0$		
$a < 0$ (Spiegelung an der x-Achse)		

Beispiel 1: Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = 0,5 \cdot 2^{1,5\cdot x} - 1$ und $g(x) = 2^x$.

a) Geben Sie für die Funktion f die Werte für die Parameter a, c, d und y_0 an.

$a = 0,5$, $c = 1,5$, $d = 0$, $y_0 = -1$

b) Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f aus dem Graph der Funktion g hervorgeht (entstehen kann!).

Um zu erklären, wie der Graph der Funktion f aus dem Graph der Funktion g hervorgeht, erklärt man das „Entstehen“ nach der Reihenfolgt: $c \to d \to a \to y_0$

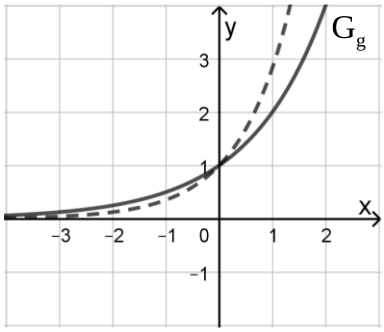
Also:

$c = 1,5$	:	Stauchung um den Faktor 1,5 in x-Richtung
$d = 0$	:	keine Verschiebung in x-Richtung
$a = 0,5$	:	Streckung um den Faktor 0,5 in y-Richtung (also eine Stauchung um den Faktor 2)
$y_0 = -1$	:	Verschiebung des Graphen um eine Einheit nach unten. Somit hat der Graph die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = -1$

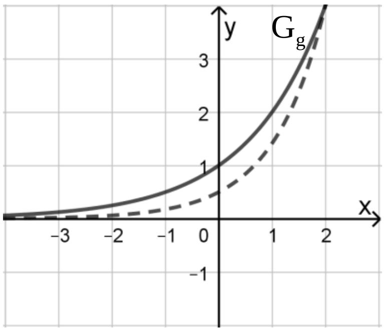
c) Skizzieren Sie den Verlauf des Funktionsgraphen

Ausgehend vom Graph der Funktion g ….

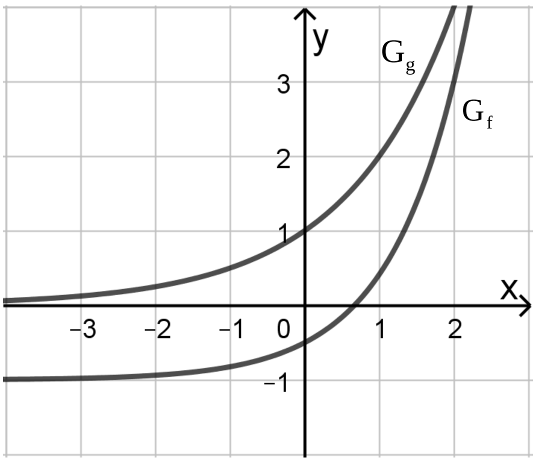
Stauchung um den Faktor 1,5 in x-Richtung



Dann Streckung um den Faktor 0,5 in y-Richtung (bzw. eine Stauchung um den Faktor 2)



Und eine Verschiebung um eine Einheit nach unten



Beispiel 2: Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=3\cdot 2^{-2x-2}+1$ und $g(x)=2^x$.

a) Geben Sie für die Funktion f die Werte für die Parameter a, c, d und y_0 an.

Dazu muss man den Funktionsterm ein klein wenig umformen!

$f(x)=3\cdot 2^{-2x-2}+1=3\cdot 2^{-2\cdot(x+1)}+1$

$a=3$, $c=-2$, $d=-1$, $y_0=1$

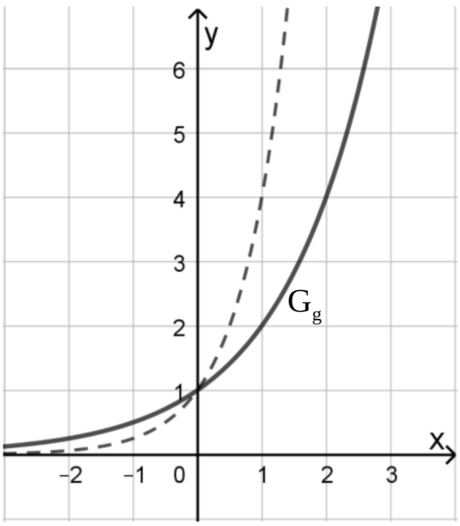
b) Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f aus dem Graph der Funktion g hervorgeht.

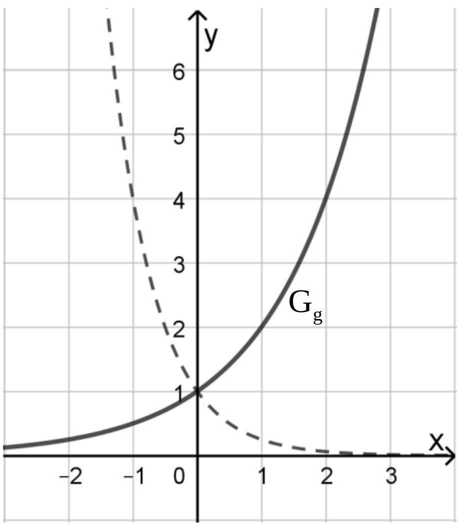
$c=-2$: Stauchung um den Faktor 2 in x-Richtung und zusätzlich Spiegelung an der y-Achse
$d=-1$: Verschiebung um eine Einheit nach links
$a=3$: Streckung um den Faktor 3 in y-Richtung
$y_0=1$: Verschiebung des Graphen um eine Einheit nach oben
Somit hat der Graph die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y=1$

c) Skizzieren Sie den Verlauf des Funktionsgraphen

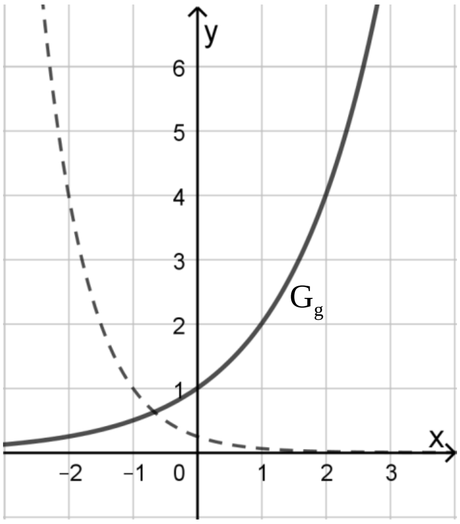
Ausgehend vom Graph der Funktion g ….

Stauchung um den Faktor 2 in x-Richtung und zusätzlich Spiegelung an der y-Achse

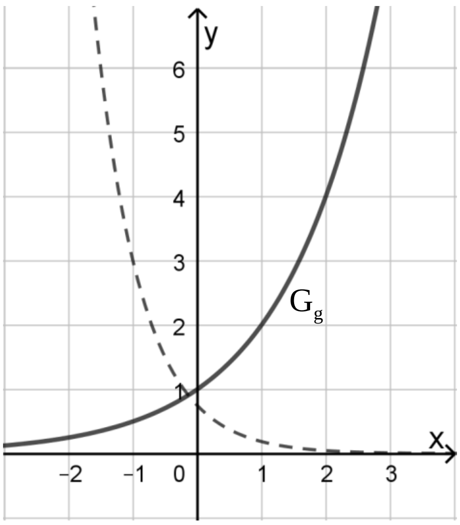




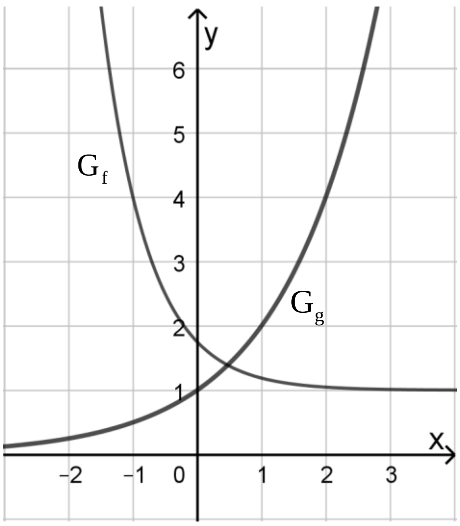
Verschiebung um eine Einheit nach links



Streckung um den Faktor 3 in y-Richtung



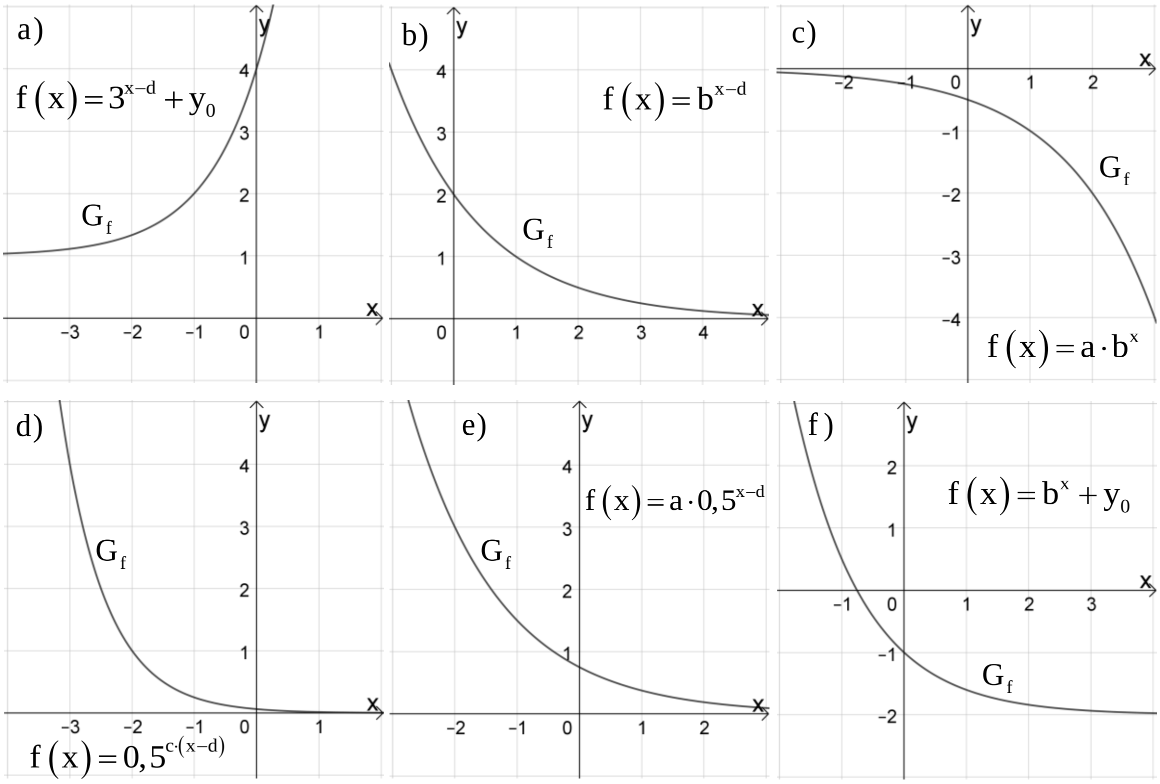
Verschiebung des Graphen um eine Einheit nach oben



Aufgaben

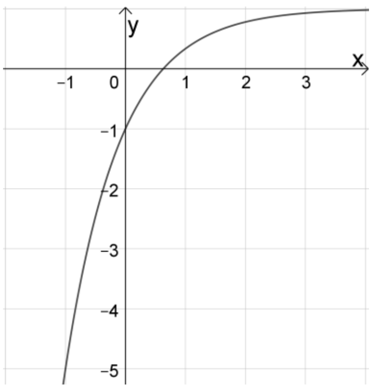
1. Gegeben ist die Funktion g mit $g(x)=2^x$. Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f aus dem Graphen der Funktion g hervorgeht.
   a) $f(x)=-2^{x+3}+1$
   b) $f(x)=\frac{1}{3}\cdot 2^{-x}-3$
   c) $f(x)=-\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{1}{2}x-1}+1$
   d) $f(x)=-3\cdot 2^{-3x+3}+3$

2. Gegeben ist jeweils der Graph der Funktion f. Geben Sie den Funktionsterm $f(x)$ an.



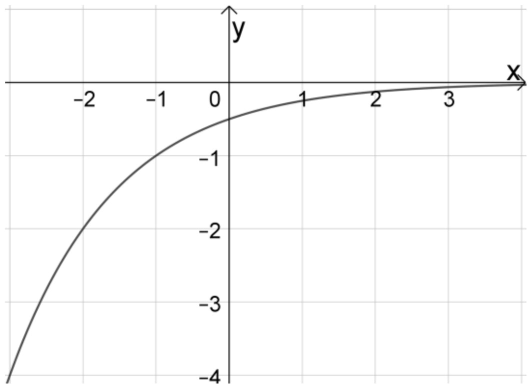
3. Gegeben ist der Graph einer Funktion. Entscheiden Sie, welcher Funktionsterm $f(x)$ zum abgebildeten Graphen gehört.

a)



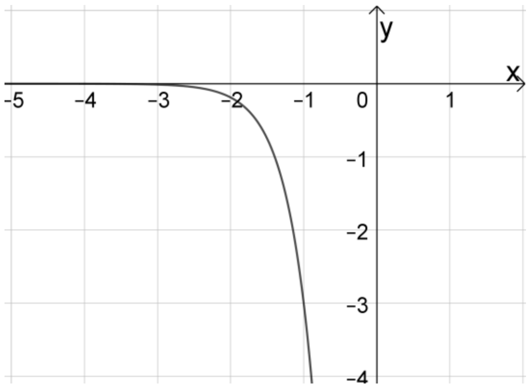
O $f(x)=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$
O $f(x)=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$
O $f(x)=0,5\cdot 3^x+1$
O $f(x)=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$
O $f(x)=\frac{1}{3}\cdot 2^x+1$

b)



O $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2^{x-1}$
O $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2^{1-x}$
O $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x-1}$
O $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{1-x}$
O $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2^{1+x}$

c)



O $f(x) = -3 \cdot 0{,}25^{2x+2}$
O $f(x) = -3 \cdot 0{,}25^{-2x+2}$
O $f(x) = -3 \cdot 0{,}25^{2x-2}$
O $f(x) = 3 \cdot 0{,}25^{-2x-2}$
O $f(x) = -3 \cdot 0{,}25^{-2x-2}$

19.3.6 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Um den Verlauf des Funktionsgraphen eine Exponentialfunktion zeichnen zu können sind die Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen sehr hilfreich.

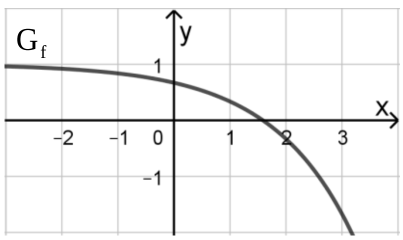
Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot 2^x + 1$. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen.

a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Das ist recht einfach, da man einfach für $x = 0$ einsetzt.

$$f(0) = -\tfrac{1}{3} \cdot 2^0 + 1 = -\tfrac{1}{3} \cdot 1 + 1 = \tfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S_y\left(0 \middle| \tfrac{2}{3}\right)$$

b) Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle!): Dazu setzt man $f(x) = 0$ und hat dann eine Exponentialgleichung zu lösen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -\tfrac{1}{3} \cdot 2^x + 1 &= 0 && \mid -1 \\ -\tfrac{1}{3} \cdot 2^x &= -1 && \mid :\left(-\tfrac{1}{3}\right) \\ 2^x &= 3 && \mid \ln(\ldots) \\ \ln\left(2^x\right) &= \ln(3) && (1) \\ x \cdot \ln(2) &= \ln(3) && \mid :\ln(2) \\ x &= \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1{,}6 && \Rightarrow \quad S_x\left(\tfrac{\ln(3)}{\ln(2)} \middle| 0\right) \end{aligned}$$



(1): Merkhilfe Seite 1 – Logarithmen: $\log_b\left(u^z\right) = z \cdot \log_b(u)$

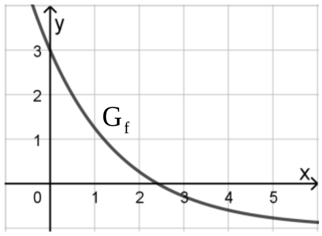
Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=3\cdot 0,75^{2x-1}-1$. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen.

a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0)=3\cdot 0,75^{2\cdot 0-1}-1=3 \quad\Rightarrow\quad S_y(0|3)$$

b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned}
f(x)&=0 &&\\
3\cdot 0,75^{2x-1}-1&=0 && |+1\\
3\cdot 0,75^{2x-1}&=1 && |:3\\
0,75^{2x-1}&=\tfrac{1}{3} && |\ln(...)\\
\ln\left(0,75^{2x-1}\right)&=\ln\left(\tfrac{1}{3}\right) && (1)\\
(2x-1)\cdot\ln(0,75)&=\ln\left(\tfrac{1}{3}\right) && |:\ln(0,75)\\
2x-1&=\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0,75)} && |+1\\
2x&=\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0,75)}+1 && |:2\\
x&=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0,75)}+1\right)\approx 2,4 && \Rightarrow\quad S_x\left(\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0,75)}+1\right)\Big|0\right)
\end{aligned}$$



(1) : Merkhilfe Seite 1 – Logarithmen : $\log_b\left(u^z\right)=z\cdot\log_b(u)$

Aufgaben

4. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen und skizzieren Sie mit deren Hilfe den Verlauf des Graphen.

   a) $f(x)=2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^x-3$

   b) $f(x)=-\tfrac{1}{2}\cdot 3^{2x}+1$

   c) $f(x)=\tfrac{1}{5}\cdot 2^{\frac{1}{2}x-1}-2$

   d) $f(x)=-3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-x+1}+2$

5. Entscheiden Sie, welche Funktionsgraphen keine Nullstellen besitzen.

   a)
   O $f(x)=3\cdot 2^{-x+1}-1$
   O $f(x)=-3\cdot 2^{-x+1}-1$
   O $f(x)=3\cdot 2^{x-1}-1$
   O $f(x)=3\cdot 2^{x}+1$
   O $f(x)=3\cdot 2^{-x+1}+1$
   O $f(x)=-3\cdot 2^{-x+1}+1$

   b)
   O $f(x)=-\tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2x-4}+3$
   O $f(x)=-\tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2x-4}-3$
   O $f(x)=\tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2x-4}+3$
   O $f(x)=-\tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-2x-4}+3$
   O $f(x)=\tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2x+4}+3$
   O $f(x)=-\tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{x}+3$

6. Bestimmen Sie die Werte für $a, b, c, d, y_0 \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph der Funktion f die angegebenen Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen besitzt. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

a) $f(x) = a \cdot 1{,}5^{\frac{1}{2}x-1} - y_0$ $\quad S_y\left(0 \middle| \frac{2}{3}\right) \quad S_x(5{,}42|0)$

b) $f(x) = -2 \cdot b^{\frac{1}{2}x-1} - y_0$ $\quad S_y(0|1) \quad S_x(2|0)$

c) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot 2^{cx-1} - y_0$ $\quad S_y(0|-2) \quad S_x(2|0)$

d) $f(x) = -\frac{2}{5} \cdot 2{,}5^{-x-d} - y_0$ $\quad S_y(0|-1) \quad S_x(4|0)$

7. Ordnen Sie den folgenden Funktionsgleichungen die jeweiligen Funktionsgraphen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

A) $f(x) = 1 + 2{,}5^x$

B) $g(x) = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5^{-x} - 1$

C) $h(x) = 4 \cdot 2{,}5^{2x} + 1$

D) $k(x) = 3 \cdot 2{,}5^{x-2} - 1$