

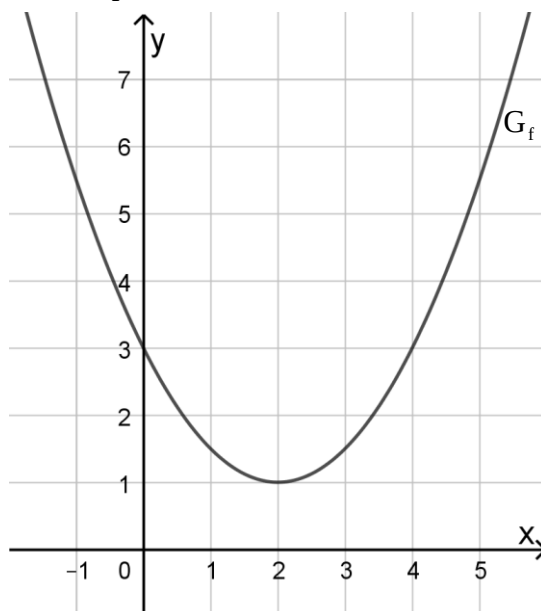
Du kannst negative Menschen
nicht durch deine Positivität verändern.
Sei höflich, tritt zur Seite
und lass das Leben ihr Lehrer sein!
(unbekannt)

§ 17 Zusammenhang zwischen G_f und $G_{f'}$

Kennt man den Graphen einer Funktion f , nicht aber deren Funktionsterm, so kann man den Graphen der Ableitungsfunktion skizzieren.

17.1 Vom Graph der Funktion f zum Graph der Ableitungsfunktion f'

Beispiel: Gegeben ist also der Graph einer Funktion f .



Um nun ausgehend vom Graph G_f auf den Graphen der Ableitungsfunktion f' zu schließen bestimmt man die Steigung des Graphen der Funktion f für verschiedene x -Werte. Diesen Vorgang nennt man allgemein „graphisches Differenzieren“ oder auch „graphisches Ableiten“.

Dazu zeichnet (oder denkt sich) man an einer Stelle x die Tangente an den Graphen G_f und ermittelt deren Steigung (Kästchen zählen!).

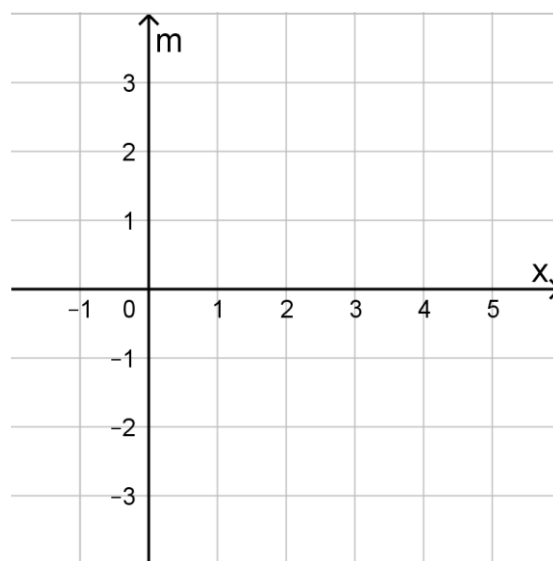
Bestimmen wir also die Steigung des Graphen der Funktion f für die folgenden x -Werte:

x	-1	0	1	2	3	4	5
m							

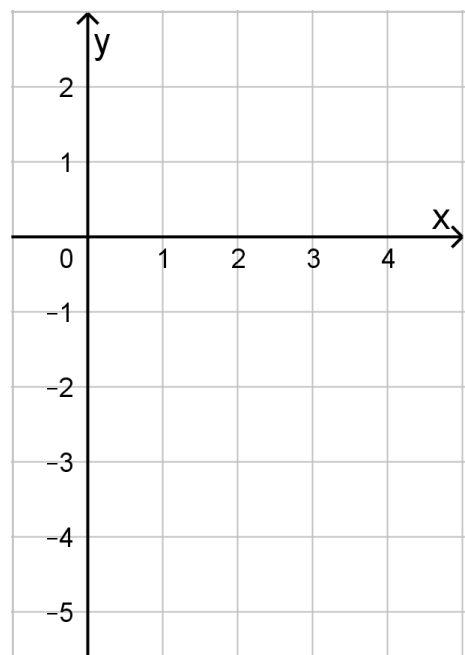
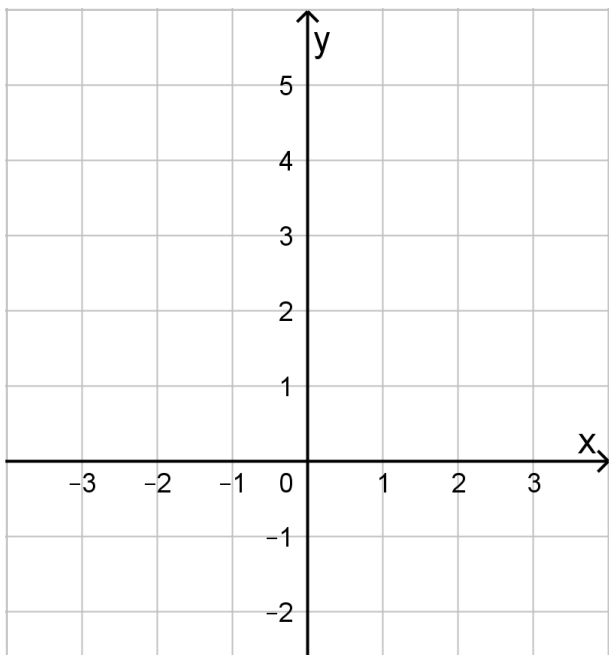
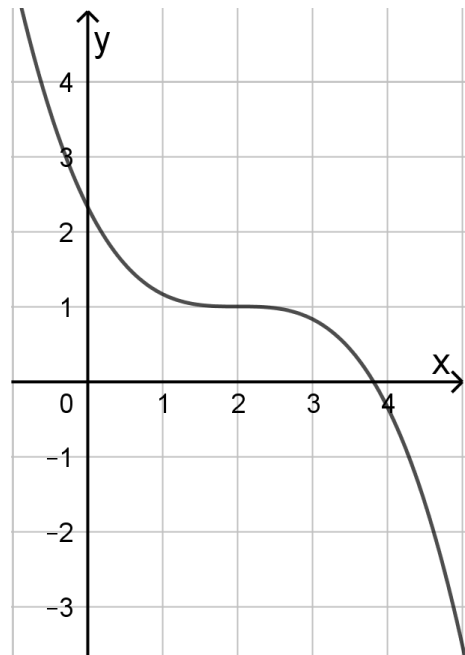
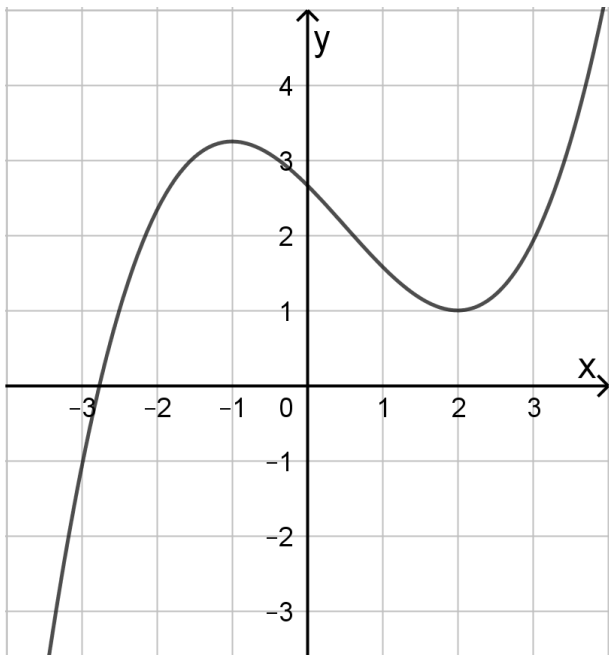
Nun tragen wir in rechts abgebildetes Koordinatensystem die Werte aus obiger Tabelle ein.

Verbindet man die einzelnen Punkte, so erhält man den Graph der Ableitungsfunktion f' .

Dabei könnte man auf die Tabelle auch verzichten, da man die x -Werte und die zugehörigen Steigungswerte m sofort in ein Koordinatensystem einzeichnen könnte. Das wollen wir gleich mal üben.



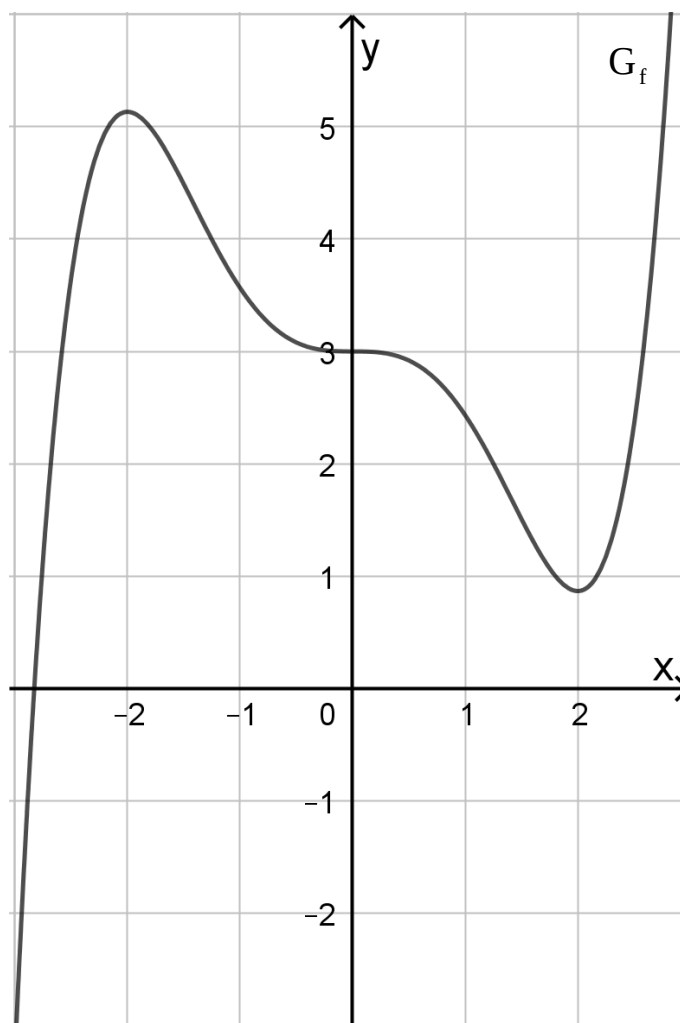
Übung 1+2: Gegeben ist der Graph der Funktion f . Zeichnen Sie in das darunter abgebildete Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion f' ein.



Aus dem Verlauf des Graphen der Funktion f lassen sich konkrete Aussagen über den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion f' machen. Folgende Tabelle gibt dabei den Zusammenhang zwischen beiden Funktionsgraphen wieder.

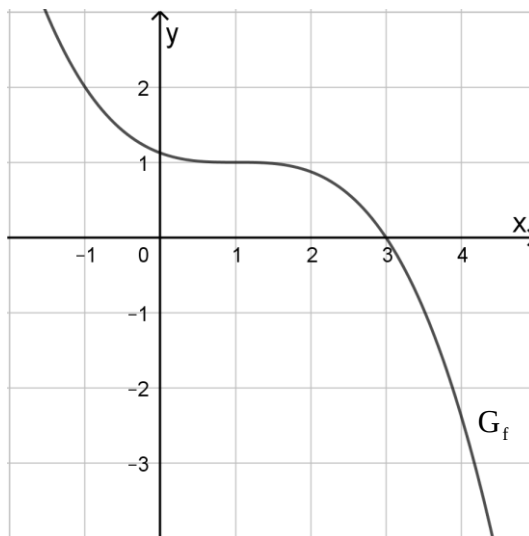
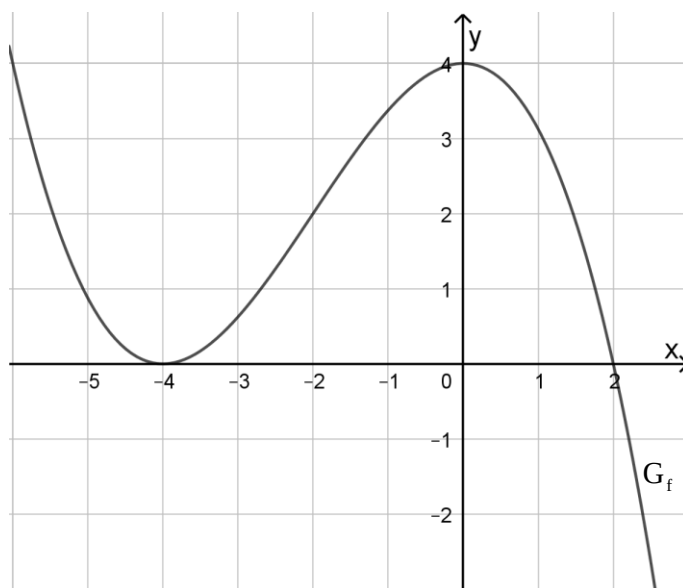
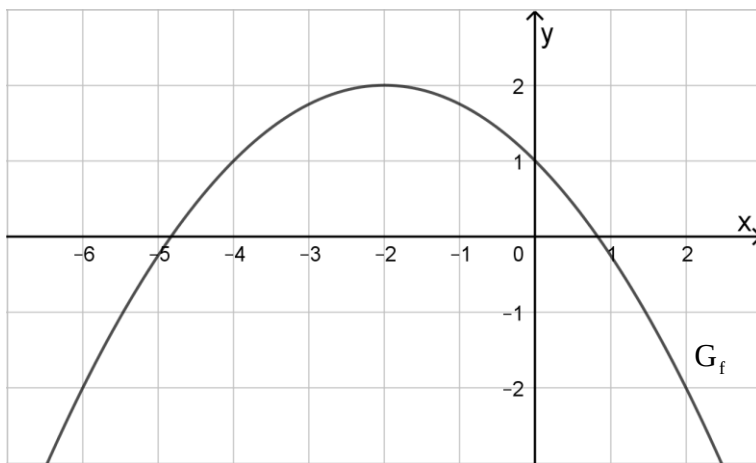
Graph der Funktion f	Graph der Ableitungsfunktion f'
hat Hochpunkt an der Stelle x_H Graph geht von steigend in fallend über	hat Nullstelle x_H Graph schneidet x-Achse von oben nach unten
hat Tiefpunkt an der Stelle x_T Graph geht von fallend in steigend über	hat Nullstelle x_T Graph schneidet x-Achse von unten nach oben
hat Wendepunkt an der Stelle x_W Graph geht von Rechts- nach Linkskrümmung über	hat Tiefpunkt an der Stelle x_W y-Koordinate entspricht der Steigung der Wendetangente
hat Wendepunkt an der Stelle x_W Graph geht von Links- nach Rechtskrümmung über	hat Hochpunkt an der Stelle x_W y-Koordinate entspricht der Steigung der Wendetangente
ist streng monoton steigend	verläuft oberhalb der x-Achse
ist streng monoton fallend	verläuft unterhalb der x-Achse
hat Terrassenpunkt an der Stelle x_{TeP}	berührt die x-Achse an der Stelle x_{TeP} (doppelte Nullstelle)

Übung 3: Gegeben ist der Graph der Funktion f . Zeichnen Sie (unter Verwendung der Zusammenhänge aus obiger Tabelle) den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem ein.

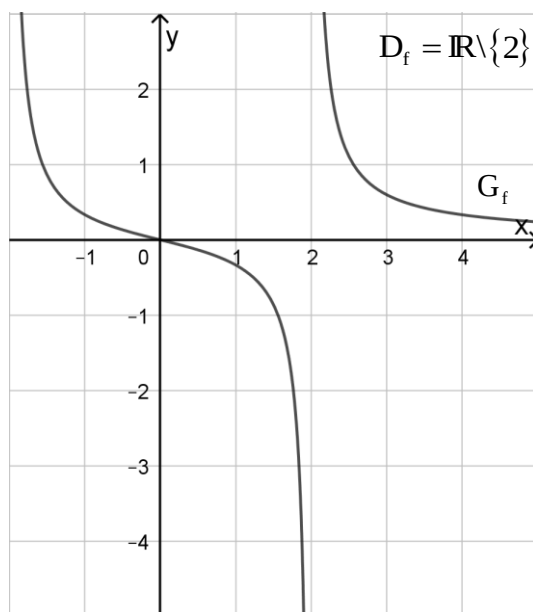
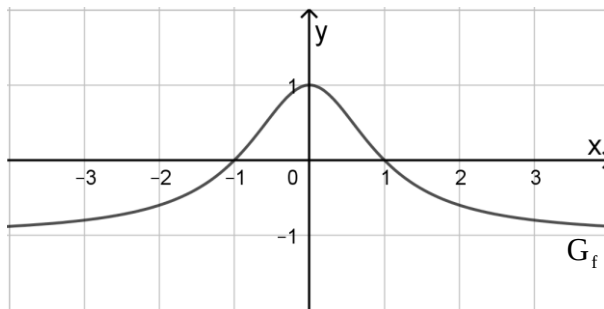
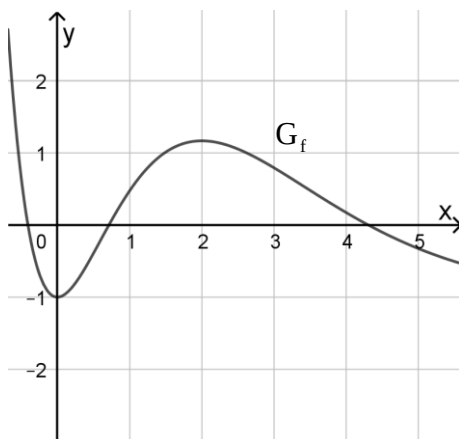
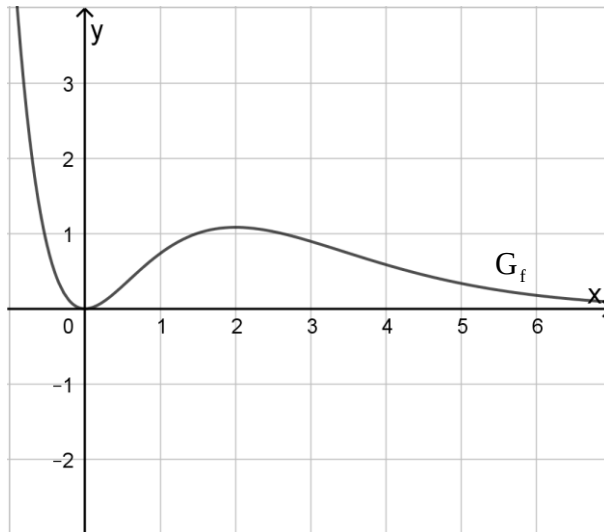
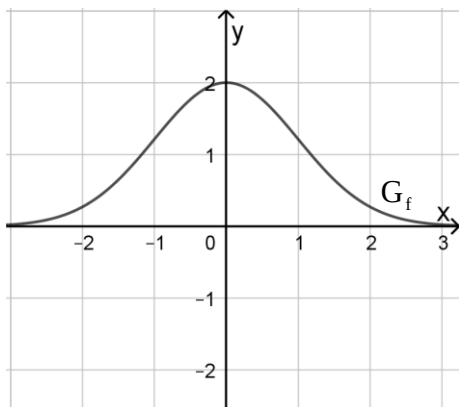


Aufgaben

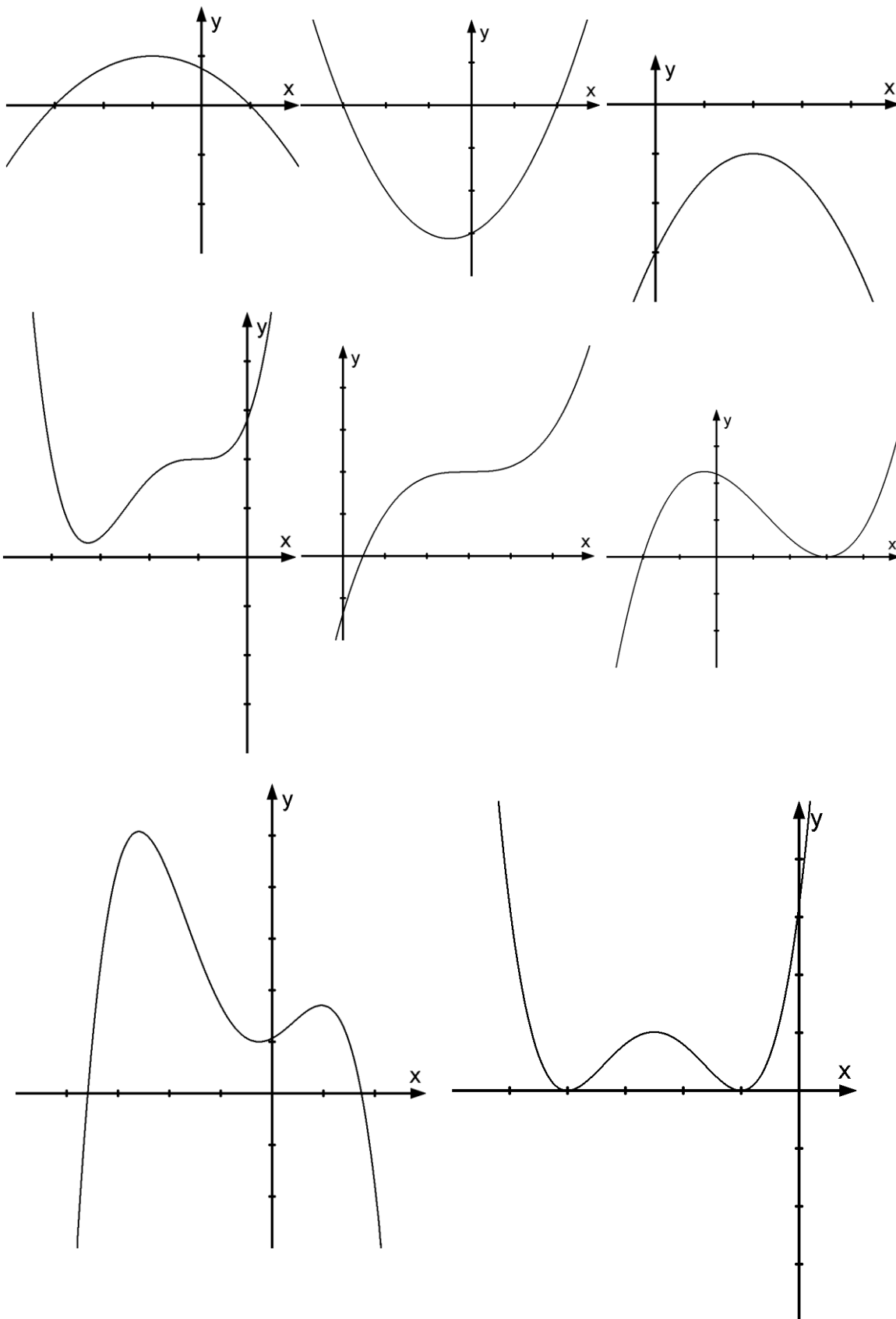
- Gegeben ist jeweils der Graph der Funktion f . Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem ein.



2. Gegeben ist jeweils der Graph der Funktion f . Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem ein.



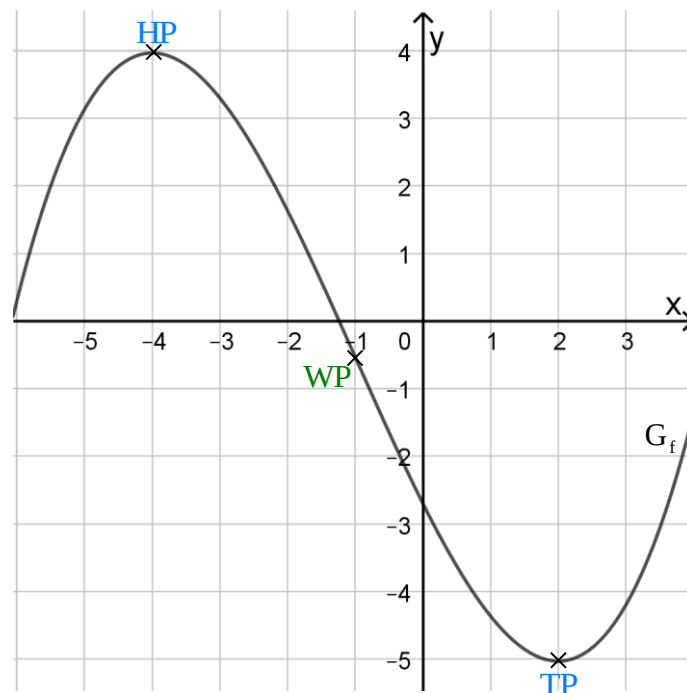
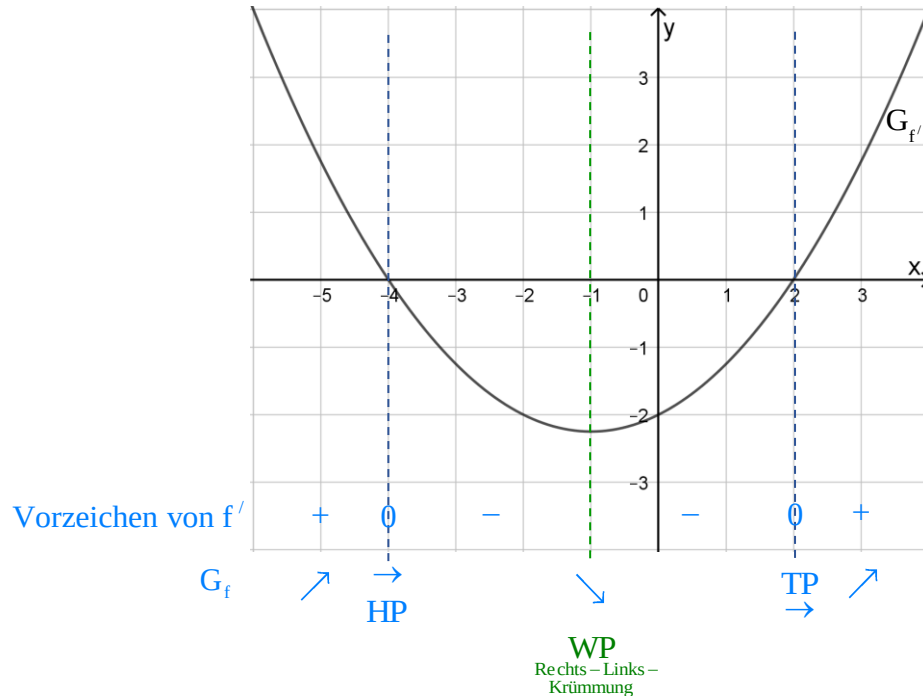
3. Gegeben ist jeweils der Graph der Funktion f . Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem ein.



17.2 Vom Graph der Ableitungsfunktion f' zum Graph der Funktion f

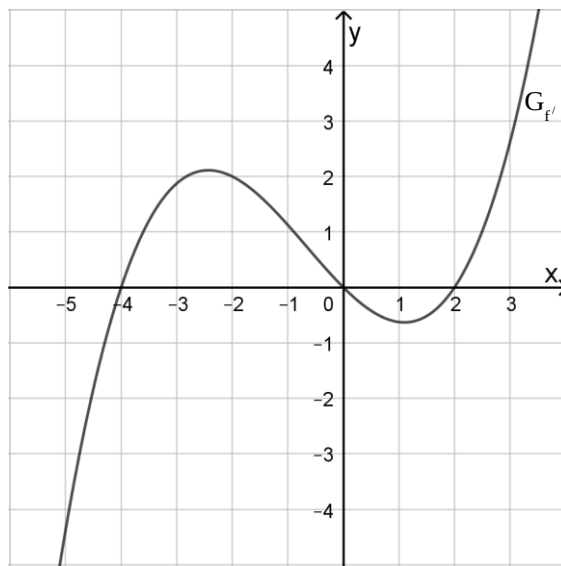
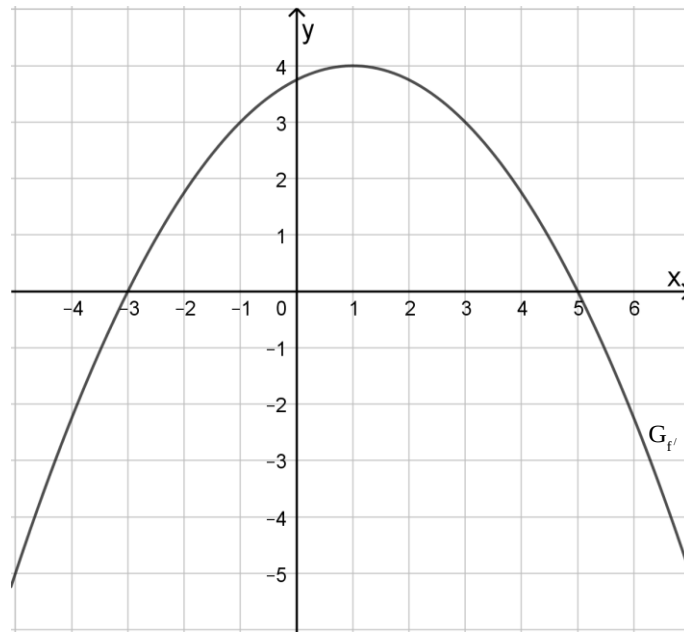
Aber auch der umgekehrte Weg ist möglich. Dabei gelten die Zusammenhänge aus obiger Tabelle nur in umgekehrter Richtung!

Beispiel: Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f' . Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen einer (möglichen) Funktion f in das Koordinatensystem ein.



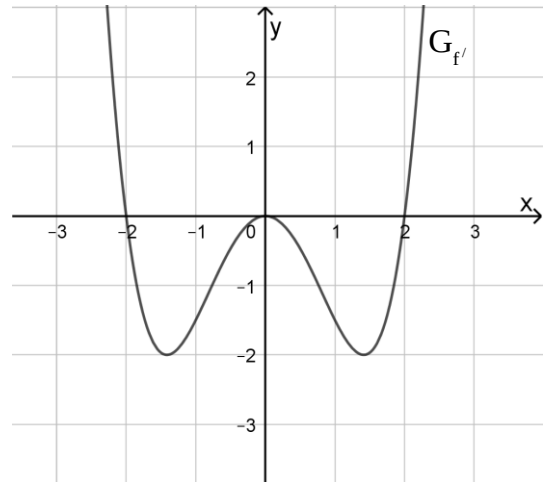
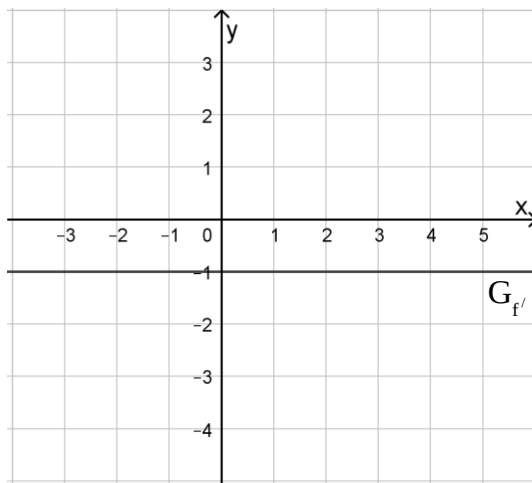
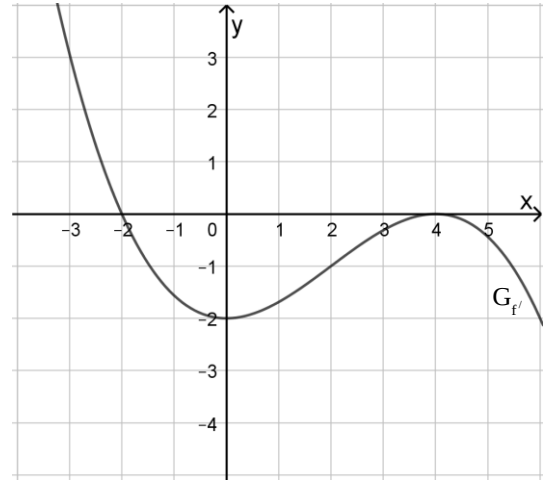
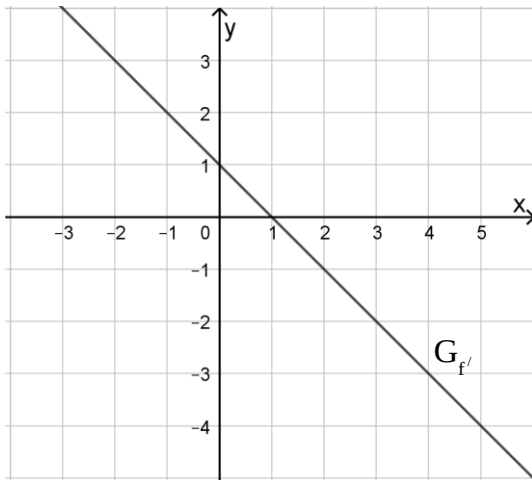
Bemerkung: Der „exakte“ Verlauf des Graphen der Funktion f lässt sich nicht zeichnen. Der gesamte Graph G_f könnte insgesamt aber auch nach oben oder nach unten verschoben sein. (Additive Konstante fällt beim Ableiten weg!)

Übung 1+2: Gegeben ist jeweils der Graph der Ableitungsfunktion f' . Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen einer (möglichen) Funktion f in dasselbe Koordinatensystem ein.

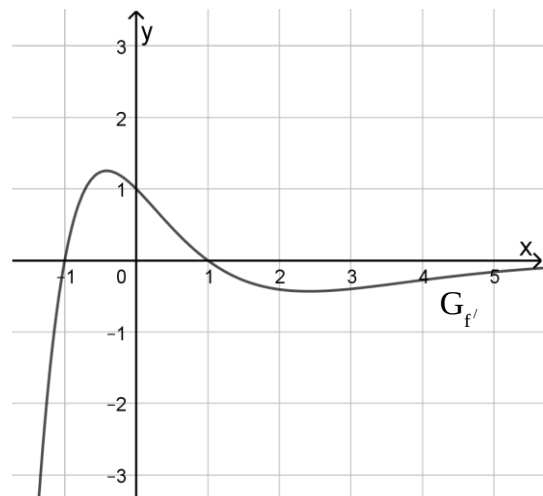
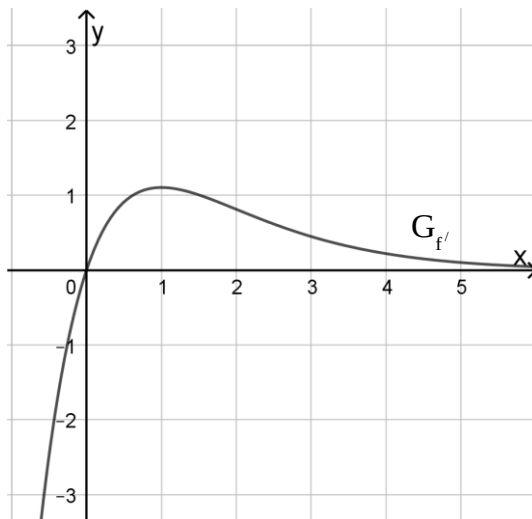


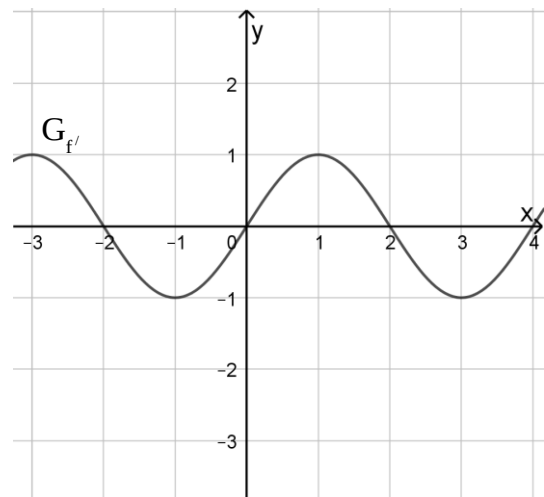
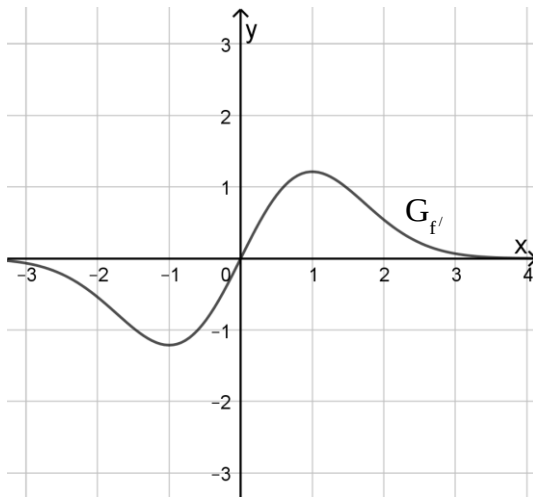
Aufgaben

4. Gegeben ist jeweils der Graph der Ableitungsfunktion f' . Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen einer (möglichen) Funktion f in dasselbe Koordinatensystem ein.

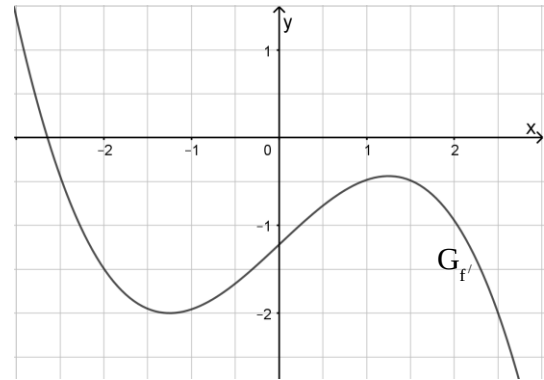


5. Gegeben ist jeweils der Graph der Ableitungsfunktion f' . Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen einer (möglichen) Funktion f in dasselbe Koordinatensystem ein.

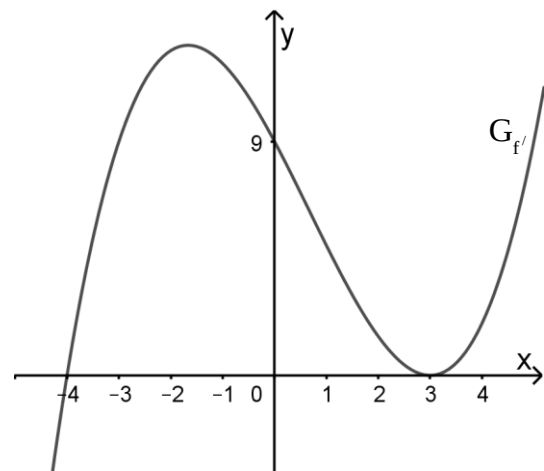




6. In folgender Abbildung ist der Graph der ersten Ableitung einer ganzrationalen Funktion f (vierten Grades) mit $D_f = \mathbb{R}$ dargestellt. Welche Aussagen treffen für die Funktion f im Intervall $J = [-3; 3]$ zu? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
- f ist streng monoton fallend in J .
 - G_f besitzt zwei Wendepunkte in J .
 - G_f besitzt zwei lokale Extrempunkte in J .
 - Der Graph G_f hat einen Tiefpunkt in J .
 - Der Grad von f' ist drei.
 - Der Graph G_f ist in J sowohl rechts- als auch linksgekrümmt.
 - Es gilt: $f(-1) > f(1)$



7. Gegeben ist die Funktion f . Der Graph seiner ersten Ableitung ist in folgender Abbildung dargestellt. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr, falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
- Der Graph von f hat bei $x = 3$ einen relativen Tiefpunkt.
 - Der Graph von f hat im dargestellten Bereich genau einen Terrassenpunkt.
 - Der Graph der Funktion f hat bei $x = 0$ eine Tangente mit der Steigung $m = 9$.
 - Die Funktion f hat bei $x = 3$ eine Nullstelle.
 - Der Graph von f'' besitzt im dargestellten Bereich zwei Extremstellen.
 - Der Graph der Funktion f hat im dargestellten Bereich an genau zwei Stellen waagrechte Tangenten.
 - Es gilt: $f(3) < f(0)$.



8. Gegeben ist die Funktion f . Der Graph seiner ersten Ableitung ist in folgender Abbildung dargestellt. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr, falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- Der Graph von f hat bei $x = \sqrt{2}$ eine waagrechte Tangente.
- Der Graph von f hat bei $x = 2$ eine waagrechte Tangente.
- Der Graph von f hat bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente.
- Der Graph $G_{f'}$ berührt bei $x = 0$ die x -Achse.
- Der Graph von f'' hat bei $x = 2$ eine waagrechte Tangente.
- Die Funktion f hat mehr als eine Nullstelle.

