Nicht mit Erfindungen, sondern mit
Verbesserungen macht man Vermögen.
(Henry Ford)

§ 16 Optimierungsaufgaben

Eine weitere wichtige Anwendung der Differentialrechnung ist das Lösen von Extremwertaufgaben. Es handelt sich hierbei um Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten (Geometrie, Ökonomie, Physik, Technik usw.) bei denen es darauf ankommt, einen Vorgang durch eine Funktion f zu beschreiben, von der im Intervall D das Maximum bzw. Minimum ermittelt werden soll. Beispiele hierfür sind:

- maximales Volumen eines Behälters,
- maximale Belastbarkeit eines Balkens,
- minimaler Materialaufwand.

Bei den Extremwertaufgaben ist folgendes zu beachten: Ist f eine auf dem abgeschlossenen Intervall $D = [a; b]$ stetige Funktion, so nimmt die Funktion f auf D ihr absolutes Maximum und Minimum an.
Mit Hilfe der Differentialrechnung können wir die relativen Extremwerte ermitteln und durch Vergleich mit den Randwerten $f(a)$ und $f(b)$ ergibt dann das absolute Maximum bzw. Minimum in $[a; b]$.
Im Folgenden werden verschiedene Beispiele für Extremwertaufgaben betrachtet. Beim Lösen solcher Aufgaben ist es wichtig, das Problem als differenzierbare Funktion einer Variablen x (oder auch t) darzustellen; treten weitere Variablen auf, so müssen diese durch sogenannte Nebenbedingungen eliminiert werden.

Beispiel: (2001 AI) Im Geometrie-Unterricht der 5. Klasse findet ein „Wettbewerb" statt. Jedes der Kinder erhält ein Stück Draht der Länge $d = 15\,\text{cm}$. Durch rechtwinkliges aufbiegen je eines Stückes der Länge a an beiden Enden soll daraus ein $\sqcup$-förmiges Gebilde entstehen. Denkt man sich nun die beiden Drahtenden durch eine unsichtbare Linie verbunden, so erhält man ein Rechteck (siehe Skizze). Sieger des Wettbewerbs ist dasjenige Kind, dessen Rechteck den größten Flächeninhalt hat.

1. Stellen Sie die Maßzahl $A(a)$ der Rechteckfläche in Abhängigkeit von a dar; bestimmen Sie die Definitionsmenge D_A der Funktion A sinnvoll.

   Es gibt hier eine klare **Zielfunktion**, hier also die Fläche $A(a)$ des Rechtecks. Für diese gilt allgemein:
   $$A = \ell \cdot b \qquad (\text{Länge} \cdot \text{Breite})$$
   In obiger Aufgabenstellung gilt für die Rechtecksbreite: $b = a$ (was auch die Variable ist!). Die Länge des Rechtecks ist zunächst aber (noch) nicht ersichtlich. Doch es gibt noch eine **Nebenbedingung** in der Angabe. Für die Länge des Drahts gilt nämlich:
   $$d = 15$$
   Mit Hilfe obiger Zeichnung lässt sich aber nun wieder die Variable a ins „Spiel" bringen. Denn es gilt:
   $$a + \ell + a = 15$$
   $$\ell + 2a = 15$$
   Nach ℓ aufgelöst folgt: $\ell = 15 - 2a$.
   Nun setzt man alles in die Zielfunktion ein und erhält:

$$A = \ell \cdot b$$
$$A(a) = (15-2a)\cdot a$$
$$A(a) = -2a^2 + 15a$$

Eine Funktion mit der sich die Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit der Größe a berechnen lässt.
Die **Definitionsmenge** der Zielfunktion ist „begrenzt“ durch den kleinsten bzw. größten Wert, den man für die Variable a wählen kann. Dabei spielen hier folgende geometrische Überlegungen eine Rolle:
Die kleinste Breite des Rechtecks: $b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$
Die kleinste Länge des Rechtecks: $\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad 15-2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 7{,}5$
Somit folgt für die Definitionsmenge: $D = [0;7{,}5]$.
Bemerkung: Ob die Randwerte der Definitionsmenge ein- oder ausgeschlossen sind spielt hier nur nebensächlich eine Rolle. Sicher macht ein Rechteck mit der Breite $a = 0$ nicht viel Sinn, aber ein Rechteck mit „atomarer“ Breite wäre praktisch auch nicht realisierbar. Aber bei späteren Berechnungen (maximales Volumen) ist es einfacher, von einer abgeschlossenen Definitionsmenge auszugehen.

2. Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Flächeninhalt den absolut größten Wert A_{max} annimmt. Bestimmen Sie auch A_{max}.

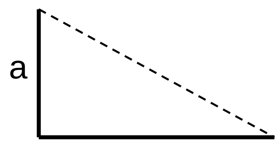
Bei dieser Aufgabenstellung ist konkret nach dem absoluten Maximum der Funktion $A(a)$ gefragt.
Also bildet man zunächst die erste Ableitung der Funktion A:
$$A'(a) = -4a + 15$$
Und löst nun die Gleichung:
$$\begin{aligned} A'(a) &= 0 \\ -4a + 15 &= 0 \\ -4a &= -15 \\ a &= 3{,}75 \end{aligned}$$
Zerlegung: $A'(a) = -4\cdot(a-3{,}75)$

VZT	0		3,75		7,5	a
-4		$-$		$-$		
$a-3{,}75$		$-$	0	$+$		
$A'(a)$		$+$	0	$-$		
G_A	RTP	$\nearrow$	$\rightarrow$ HP	$\searrow$	RTP	

Funktionswerte berechnen:
$$\left.\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(3{,}75) &= 28\tfrac{1}{8} \\ A(7{,}5) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A_{max} = 28\tfrac{1}{8} \text{ für } a = 3{,}75$$
Maße des Rechtecks: Länge $\ell = 7{,}5$ und Breite $a = 3{,}75$
Bemerkung: Die Maße des Rechtecks müssen nur angegeben werden, wenn das in der Aufgabenstellung auch ausdrücklich gefragt/verlangt ist.

Aufgaben:

1.0 Jeder Schüler der Klasse NT 12 erhält ein Stück Draht der Länge 16 cm. Durch rechtwinkliges Aufbiegen eines Stückes der Länge a soll daraus ein L-förmiges Gebilde entstehen. Denkt man sich die beiden Drahtenden durch eine unsichtbare Linie verbunden, so erhält man ein Dreieck.



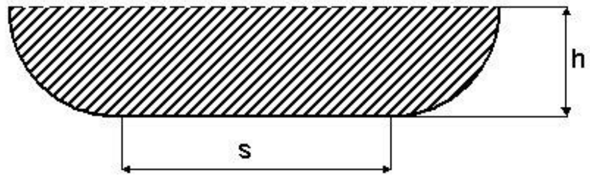
1.1 Stellen Sie die Maßzahl $A(a)$ der entstandenen Dreiecksfläche in Abhängigkeit von a dar; bestimmen Sie die Definitionsmenge D_A der Funktion A sinnvoll.

(Teilergebnis: $A(a) = 8a - \frac{1}{2}a^2$)

1.2 Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Flächeninhalt den absolut größten Wert A_{max} annimmt. Bestimmen Sie auch A_{max}.

2. **2005 AI**

4.0 Der Querschnitt des abgebildeten, oben offenen Kanals ist begrenzt durch zwei Viertelkreisbögen und durch eine Strecke der Länge $s \geq 0$. Die Höhe des Kanals ist h.

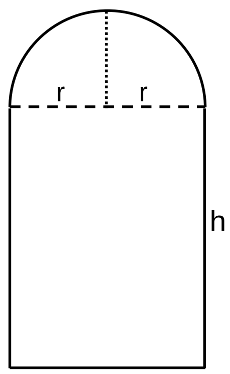


4.1 Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche $A(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h, wenn der „Umfang“ (2 Viertelkreisbögen und Strecke s) $5\,\text{LE}$ beträgt.
Ermitteln Sie die größtmögliche geometrisch sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $A: h \mapsto A(h)$. (7 BE)

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: A(h) = 5h - \frac{1}{2}h^2\pi\right]$

4.2 Bestimmen Sie h so. dass die Querschnittsfläche A den größten Wert besitzt. Berechnen Sie diesen Wert. Beschreiben Sie für diesen Fall die Form der Querschnittsfläche A. (5 BE)

3.0 Ein Künstler hat vor ein etwas besonderes Bild zu malen. Das Bild soll dabei die Form eines Rechecks mit aufgesetzten Halbkreis haben. Der Umfang U des gesamten Bildes beträgt $5\,\text{m}$.



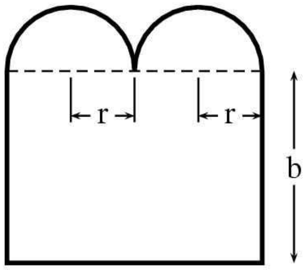
3.1 Stellen Sie die Maßzahl der Fläche $A(r)$ in Abhängigkeit vom Radius r des aufgesetzten Halbkreises auf und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der zugehörigen Funktion A an.

$\left(\text{Mögliches Teilergebnis}: A(r) = 5r - \left(2 + \frac{1}{2}\pi\right)r^2\right)$ (7 BE)

3.2 Bestimmen Sie r $\left(r \in \mathbb{D}_A\right)$ so, dass die Fläche den absolut größten Wert annimmt. Bestimmen Sie für diesen Fall die Gesamthöhe des Bildes sowie die maximale Bildfläche A_{max}. (6 BE)

4. **2008 AII**

4.0 Ein Doppelrundbogenfenster (siehe Zeichnung) wird von drei Seiten eines Rechtecks sowie von zwei Halbkreisen (jeweils Radius r) begrenzt.
Der Umfang des Fensters beträgt 10 m.
(Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet!)



4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(r) des Fensters in Abhängigkeit vom Radius r der Halbkreise dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an.

$\left[\text{Teilergebnis}: A(r) = 20r - (3\pi + 8)\cdot r^2\right]$ (7 BE)

4.2 Berechnen Sie auf 3 Nachkommastellen genau denjenigen Wert von r, für den der Flächeninhalt des Fensters seinen größten Wert annimmt. Wie viel Prozent des Inhalts nimmt in diesem Fall der rechteckige Teil des Fensters ein? (6 BE)

5. **2001 AII**

2.0 Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von 10€ durchschnittlich 200 Besucher. Man schätzt, dass bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um 1€ die ursprüngliche Besucherzahl um durchschnittlich 10 abnehmen wird, bei einer Erhöhung um 2€ um 20, bei einer Erhöhung um 3€ um 30 usw. (Zur Vereinfachung werden für die Berechnungen sämtliche Einheiten weggelassen.)

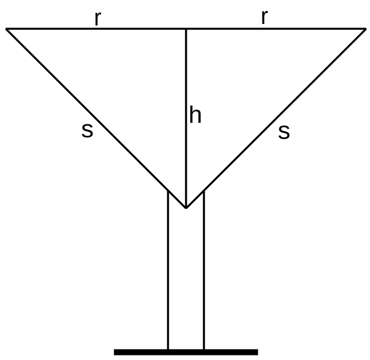
2.1 Die zu erwartenden Einnahmen in Abhängigkeit von der Preiserhöhung x lassen sich mithilfe einer differenzierbaren Funktion E beschreiben. Ermitteln Sie den Funktionsterm $E(x)$. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge D_E an, wenn man als Grundmenge $\mathbb{R}$ wählt. (4 BE)

(Teilergebnis: $E(x) = 2000 + 100x - 10x^2$)

2.2 Berechnen Sie den Eintrittspreis so, dass die Einnahmen den absolut größten Wert annehmen. (5 BE)

6. **2000 AI**

Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze des Achsenschnitts; die Dicke der Glaswand werde vernachlässigt). Die Längenmaßzahl der Mantellinie s des Kegels beträgt 12.



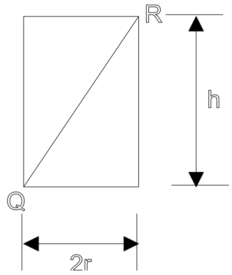
Stellen Sie die Volumenmaßzahl $V(h)$ des Kegels in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h dar und geben Sie die Definitionsmenge D_V der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ an.

Weisen Sie nach, dass die Volumenmaßzahl $V(h)$ für $h_1 = 4\sqrt{3}$ ihren absolut größten Wert annimmt. Zeigen Sie außerdem, dass in diesem Fall die Längenmaßzahlen von Radius r_1 und Höhe h_1 des Kegels im Verhältnis $\sqrt{2}:1$ stehen.

(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi\left(-\frac{h^3}{3} + 48h\right)$) (11 BE)

7. **2002 AII**

4.0 Bei zylinderförmigen Behältern mit Höhe h und Radius r (Seitenansicht s. nebenstehende Skizze) ist $\overline{QR} = 12\,\text{dm}$ konstant. (Einheiten bleiben unberücksichtigt.)

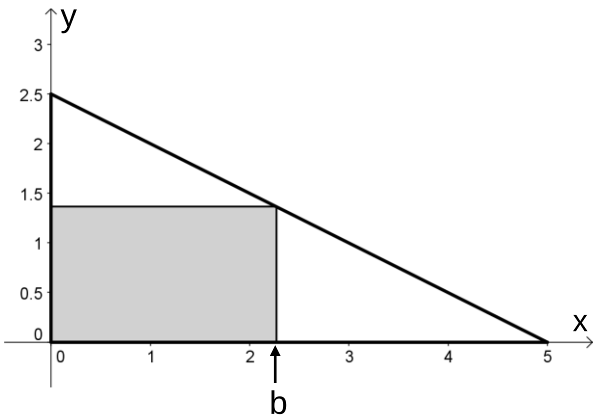


4.1 Stellen Sie die Maßzahl des Volumens $V(h)$ des Behälters in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der zugehörigen Funktion V an.

(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi \cdot \left(-\frac{h^3}{4} + 36h \right)$.) (4 BE)

4.2 Bestimmen Sie h ($h \in \mathbb{D}_V$) so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Bestimmen Sie für diesen Fall auch den Radius r des Behälters sowie das maximale Volumen V_{max}. (8 BE)

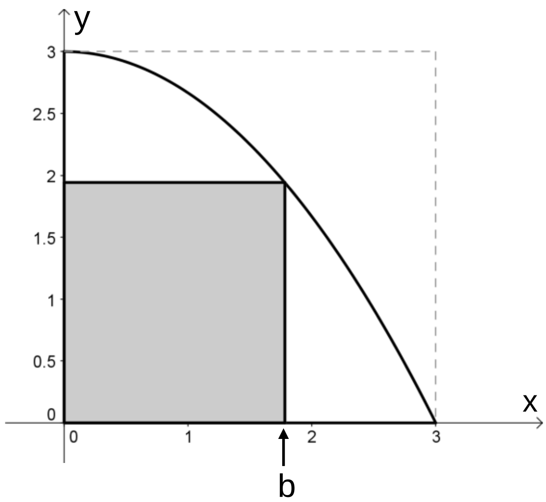
8.0 Aus einer dreieckigen Glasplatte (siehe Skizze) soll eine rechteckige Glasplatte herausgeschnitten werden.



8.1 Stellen Sie den Flächeninhalt $A(b)$ der rechteckigen Glasplatte in Abhängigkeit von der Breite b dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion A an.

8.2 Bestimmen Sie nun b so, dass der Flächeninhalt der rechteckigen Glasplatte den größten Wert annimmt. Ermitteln Sie auch die Höhe der rechteckigen Glasplatte.

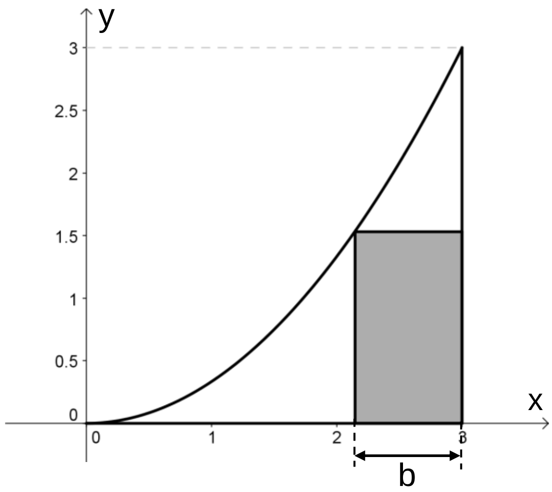
9.0 Aus einer parabelförmigen Glasplatte (siehe Skizze) soll eine rechteckige Glasplatte herausgeschnitten werden.



9.1 Stellen Sie den Flächeninhalt $A(b)$ der rechteckigen Glasplatte in Abhängigkeit von der Breite b dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_A$ der Funktion A an.

9.2 Bestimmen Sie nun b so, dass der Flächeninhalt der rechteckigen Glasplatte den größten Wert annimmt. Ermitteln Sie auch die Höhe der rechteckigen Glasplatte.

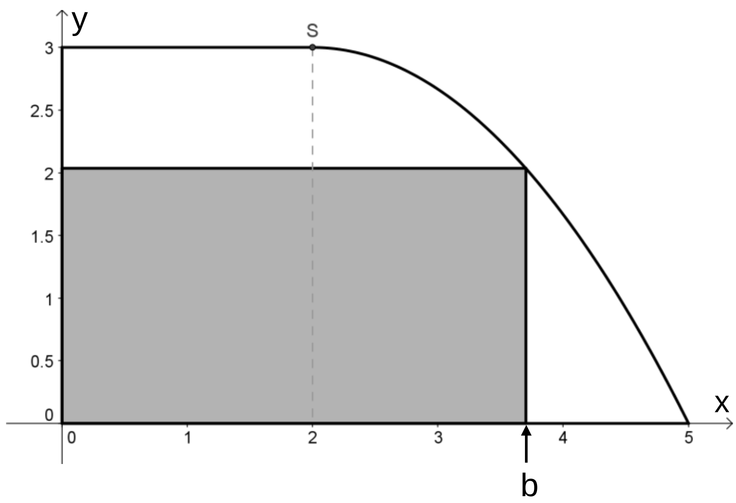
10.0 Aus einer parabelförmigen Glasplatte (siehe Skizze) soll eine rechteckige Glasplatte herausgeschnitten werden.



10.1 Stellen Sie den Flächeninhalt $A(b)$ der rechteckigen Glasplatte in Abhängigkeit von der Breite b dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion A an.

10.2 Bestimmen Sie nun b so, dass der Flächeninhalt der rechteckigen Glasplatte den größten Wert annimmt. Ermitteln Sie auch die Höhe der rechteckigen Glasplatte.

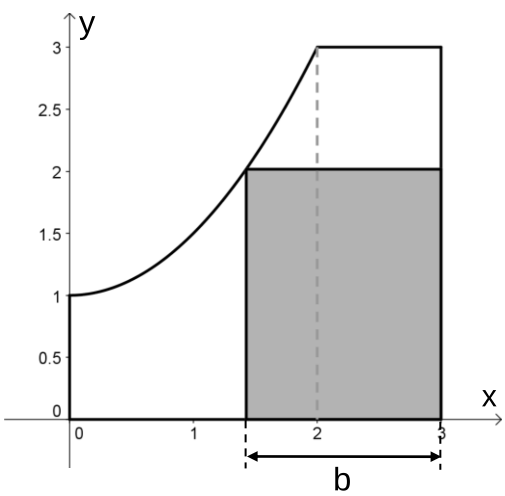
11.0 Aus einer rechteckigen Glasplatte ist ein parabelförmiges Stück abgebrochen (siehe Skizze). Aus der verbleibenden Glassplatte soll nun eine rechteckige Glasplatte herausgeschnitten werden.



11.1 Stellen Sie den Flächeninhalt $A(b)$ der rechteckigen Glasplatte in Abhängigkeit von der Breite b dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion A an.

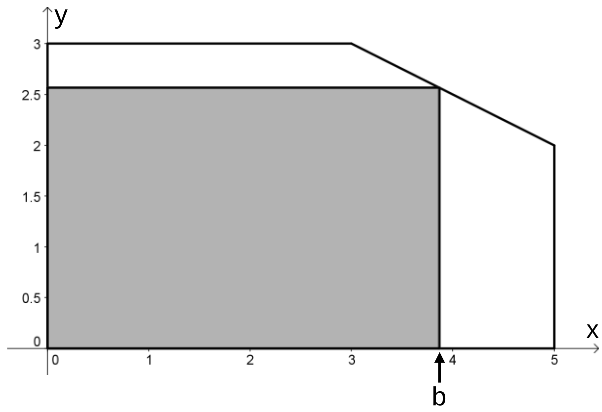
11.2 Bestimmen Sie nun b so, dass der Flächeninhalt der rechteckigen Glasplatte den größten Wert annimmt. Ermitteln Sie auch die Höhe der rechteckigen Glasplatte.

12.0 Aus einer rechteckigen Glasplatte ist ein parabelförmiges Stück abgebrochen (siehe Skizze). Aus der verbleibenden Glassplatte soll nun eine rechteckige Glasplatte herausgeschnitten werden.



12.1 Stellen Sie den Flächeninhalt $A(b)$ der rechteckigen Glasplatte in Abhängigkeit von der Breite b dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion A an.

12.2 Bestimmen Sie nun b so, dass der Flächeninhalt der rechteckigen Glasplatte den größten Wert annimmt. Ermitteln Sie auch die Höhe der rechteckigen Glasplatte.

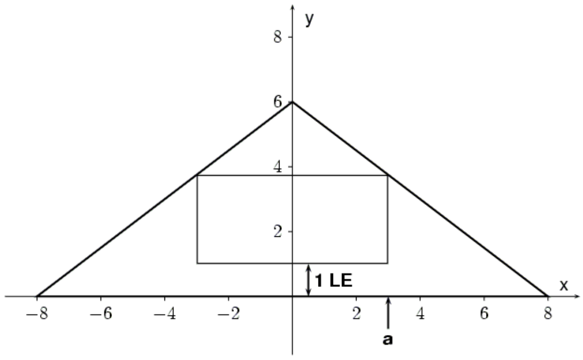


13.0 Aus einer rechteckigen Glasplatte ist ein gerades Stück abgebrochen (siehe Skizze). Aus der verbleibenden Glassplatte soll nun eine rechteckige Glasplatte herausgeschnitten werden.

13.1 Stellen Sie den Flächeninhalt $A(b)$ der rechteckigen Glasplatte in Abhängigkeit von der Breite b dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion A an.

13.2 Bestimmen Sie nun b so, dass der Flächeninhalt der rechteckigen Glasplatte den größten Wert annimmt. Ermitteln Sie auch die Höhe der rechteckigen Glasplatte.

14. **2007 AII**

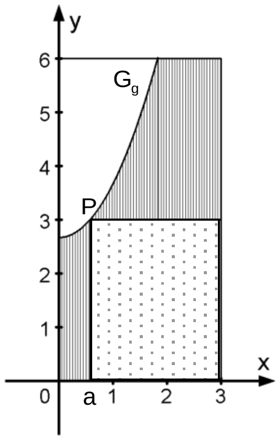


4.0 In einen dreieckigen Dachgiebel soll symmetrisch zur Mittelachse (y-Achse) ein rechteckiges Fenster eingebaut werden. Das Fenster soll auf einem Sims der Höhe 1 LE aufsitzen (siehe Skizze):

4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(a) des Fensters in Abhängigkeit von a (siehe Skizze) dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge der Funktion A an. [Mögliches Teilergebnis: $A(a) = 10a - 1,5a^2$]

4.2 Bestimmen Sie nun a so, dass der Flächeninhalt des Fensters den größten Wert annimmt. Ermitteln Sie auch Breite und Höhe dieses Fensters.

15. **2003 AI**



3.0 Die schraffierte Fläche in der nebenstehenden Skizze stellt den Rest einer längs eines Parabelstücks G_g zersprungenen ehemals rechteckigen Glasplatte dar. Der zu diesem Parabelstück gehörende Funktionsterm lautet:

$g(x) = x^2 + \frac{8}{3}$ mit $D_g = \left[0; \sqrt{\frac{10}{3}}\right]$.

Aus dem Rest der Glasplatte soll eine achsenparallele Scheibe (punktiert) so geschnitten werden, dass der Punkt $P(a; g(a))$ auf G_g liegt.

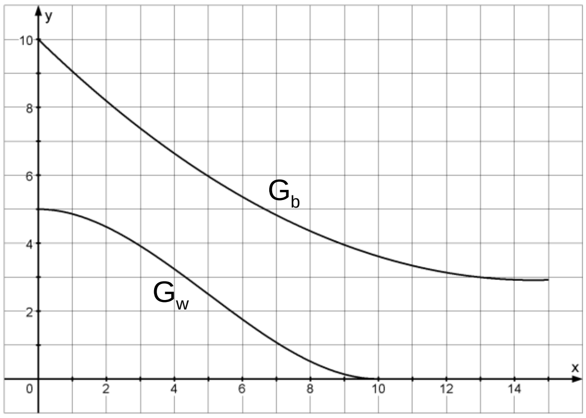
3.1 Stellen Sie die Maßzahl A(a) der „neuen“ Rechtecksfläche in Abhängigkeit von der Abszisse a der Punktes P dar. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an. (Lage von P siehe Skizze!) (4 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8$)

3.2 Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von a, für den der Flächeninhalt den größten Wert A_{max} annimmt. Berechnen Sie auch A_{max}. (7 BE)

16. **2005 AII**

2.0 Nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt einer überdachten Wasserrutsche. Der Graph G_w stellt die Wasserrutsche, der Graph G_b stellt die Bedachung dar, die über die Rutsche hinaus verlängert ist.
Die Funktionen w und b sind gegeben durch
$w: x \mapsto \frac{1}{100}\left(x^3 - 15x^2 + 500\right)$ mit
$D_w = \left[0;10\right]$ und
$b: x \mapsto \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10$ mit $D_b = \left[0;15\right]$.



2.1 Berechnen Sie an welcher Stelle x_1 die Wasserrutsche das stärkste Gefälle aufweist.(4 BE)

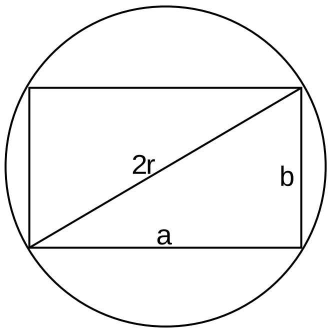
2.2 Kondenswasser, das sich an der Unterseite der Bedachung gebildet hat, tropft von der tiefsten Stelle des Daches herunter. Berechnen Sie die Stelle x_2, an der das Wasser heruntertropft. (4 BE)

2.3 Die Funktion $d: x \mapsto d(x)$ mit $D_d = \left[0;10\right]$ beschreibt den in y-Richtung gemessenen Abstand zwischen Wasserrutsche und Dach. Zeigen Sie, dass sich $d(x)$ auch in der Form $d(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$ schreiben lässt. (2 BE)

2.4 Aus Sicherheitsgründen wird ein in y-Richtung gemessener Mindestabstand zwischen Wasserrutsche und Dach von $3{,}30 \ \left(\text{LE}\right)$ vorgegeben. Untersuchen Sie rechnerisch, ob dieser Mindestabstand an jeder Stelle eingehalten wird. (8 BE)

17. **1999 AII**

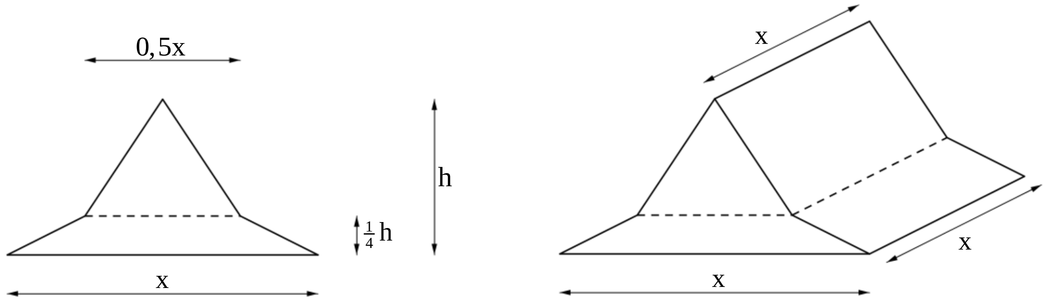
Aus einer kreisförmigen Rasenfläche mit dem Radius $r = 5$ (L.E.) soll für ein Blumenbeet eine rechteckige Fläche mit den Seiten a und b so ausgestochen werden, dass dieses Rechteck dem Kreis einbeschrieben ist (siehe Skizze). Die von a ab abhängige Maßzahl des Flächeninhalts des Rechtecks wird mit $A(a)$ bezeichnet.
Berechnen Sie, wie lang die Seite a sein muss, damit die Größe $g(a) = \left(A(a)\right)^2$ (und damit auch $A(a)$) den absolut größten Wert annimmt, und ermitteln Sie auch die absolut größte Flächenmaßzahl. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.



(Teilergebnis: $g(a) = 100a^2 - a^4$) (11 BE)

18. **2011 A I**

5.0 Eine Schokoladenfirma will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und die Breite der Praline beträgt jeweils x cm. Die weiteren Größenverhältnisse sind den folgenden Abbildungen zu entnehmen.



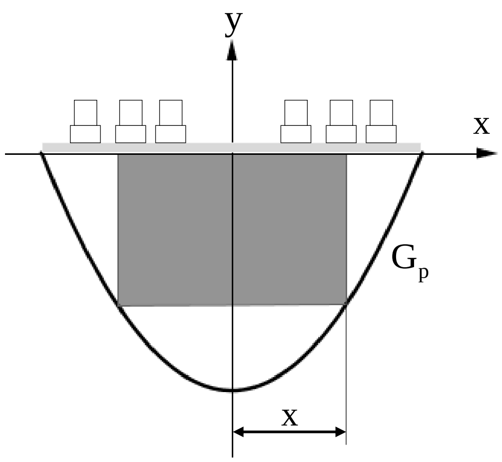
Aus verpackungstechnischen Gründen gilt für die Summe aus Höhe h, Breite und Länge 8 cm. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(x)$ der Praline in Abhängigkeit von x auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an. (7 BE)
$\left[\text{Teilergebnis}: V(x) = -0,75x^3 + 3x^2\right]$

5.2 Berechnen Sie x so, dass das Volumen der Praline den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die Höhe h der Praline. (6 BE)

19. **2011 A II**

5.0 Der Gepäckraum eines Flugzeuges kann im Querschnitt mithilfe der Funktion $p: x \mapsto 0,5x^2 - 3,125$ beschrieben werden. Das Gepäck soll dabei in Containern mit rechteckiger Querschnittsfläche untergebracht werden (vgl. Abbildung). Die Längeneinheit ist Meter und kann bei den Berechnungen weggelassen werden.



5.1 Stellen Sie eine Gleichung für die Querschnittsfläche $A(x)$ der Container in Abhängigkeit von x auf und bestimmen Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge. (4 BE)
$\left[\text{Teilergebnis}: A(x) = -x^3 + 6,25x\right]$

5.2 Berechnen Sie x so, dass die Querschnittsfläche der Container den größten Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Breite und Höhe der Container. (6 BE)

20. **2013 A I**

3.0 Bei einem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a wird von der Ecke D ausgehend je eine Strecke der Länge x mit $0 < x < a$ in Richtung A bis zum Punkt E und in Richtung C bis zum Punkt F abgetragen. Dann wird das Quadrat längs EF so gefaltet, dass das Dreieck FDE senkrecht zum ursprünglichen Quadrat steht. Die hochstehende Ecke D bildet mit den Punkten A, B, C, F und E eine Pyramide mit fünfeckiger Grundfläche.

3.1 Fertigen Sie eine Skizze des Quadrats ABCD mit den in 3.0 gegebenen Punkten und Strecken an. (2 BE)

3.2 Stellen Sie das Volumen $V_a(x)$ der entstehenden Pyramide in Abhängigkeit von x dar. Die Höhe der Pyramide ist gegeben durch $h = \frac{\sqrt{2}}{2}x$. (4 BE)
$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(2a^2x - x^3\right)\right]$

3.3 Bestimmen Sie x so, dass das Volumen der Pyramide den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall und mit $a = 3$ Volumen und Höhe der Pyramide. (7 BE)

21. **2013 A II**

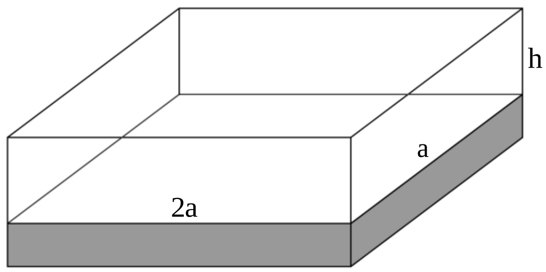
5.0 Eine Schule veranstaltet eine Projektwoche zum Thema “Work-Life-Balance”. Zum Abschluss erhalten alle Teilnehmer je einen Relax-Ball, der in einer zylinderförmigen Schachtel verpackt ist. Von dieser ist bekannt, dass sie ein Oberfläche von $180\,\text{cm}^2$ besitzt. Bei der Rechnung wird auf die Einheiten verzichtet.

5.1 Zeigen Sie, dass für das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit vom Zylinderradius r gilt: $V(r) = -\pi \cdot r^3 + 90r$ (4 BE)

5.2 Nach Information des Verbraucherschutzes kann eine Verpackung dann als unzulässig deklariert werden, wenn die Füllmenge vom Fassungsvermögen einer Verpackung um mehr als 30 % abweicht.
Prüfen Sie, ob eine Verpackung dieser Anforderung gerecht wird, wenn die Schachtel mit $r = 3{,}1\,\text{cm}$ einen Ball mit dem Durchmesser von $60\,\text{mm}$ enthält.
Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. (5 BE)

22. **2010 A I**

4.0 Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge 2a, der Breite a und der Höhe h. Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt. Die lichtdurchlässige Oberfläche soll $4\,\text{m}^2$ betragen. Führen Sie folgende Rechnungen ohne Einheiten durch.



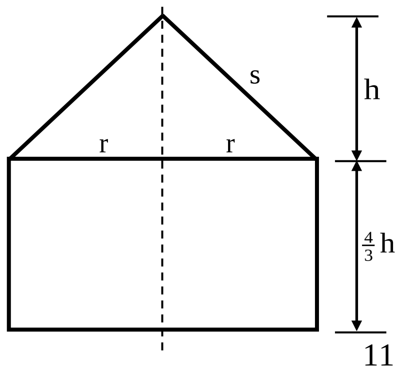
4.1 Bestimmen Sie das Volumen $V(a)$ des Daches in Abhängigkeit von a.
$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3\right]$ (4 BE)

4.2 Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_V$ der Funktion $V: a \mapsto V(a)$ für den in 4.0 gegebenen Sachzusammenhang. (5 BE)

4.3 Ermitteln Sie a so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die zugehörige Höhe h. (7 BE)

23. **2010 A II**

3.0 Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts). Die Mantellänge s des Kegels beträgt $15\,\text{m}$. Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt.



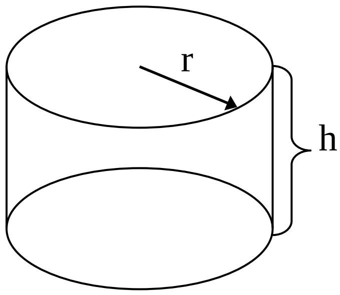
3.1 Stellen Sie die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ an.(6 BE)

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi\right]$

3.2 Berechnen Sie h so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei nicht. Bestimmen Sie auf den nächsten ganzzahligen Wert gerundet den Wert V_{max} des maximalen Volumens. (6 BE)

24. **2009 A I**

5.0 Eine zylinderförmige Trommel (siehe Skizze) besitzt die Gesamtoberfläche $2400 \cdot \pi cm^2$. Der Klang der Trommel hängt auch von der Oberfläche und dem Volumen ab. Die Boden- und Deckfläche der Trommel sind mit Fell bespannt. Durch die erhältlichen Fellgrößen ergibt sich, dass ein Radius r von 12 cm bis 30 cm möglich ist.
Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(r)$ der Trommel in Abhängigkeit von r auf. $\left[\text{Teilergebnis}: V(r) = \pi \cdot \left(1200r - r^3\right)\right]$ (4 BE)

5.2 Berechnen Sie r so, dass das Volumen der Trommel den größten Wert (und damit die Trommel den tiefsten Ton) annimmt. (5 BE)

25. **2009 A II**

4.0 Die Gebührenordnung des Paketdienstes „Paket Ahoi“ enthält folgende Klausel: „Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises 100 cm nicht überschreiten.“ Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet!

4.1 Berechnen Sie das Volumen $V(d)$ eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 100 cm beträgt. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an. (5 BE)

$\left[\text{Mögliches Teilergebnis}: V(d) = \pi \cdot \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3\right)\right]$

4.2 Bestimmen Sie nun die Maße desjenigen zylinderförmigen Päckchens, das dabei maximales Volumen aufweist. (7 BE)

26. **2008 A I**

4.0 Aus einem Stück Draht der Länge 72 [cm] sollen die Kanten eines Quaders geformt werden, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a bzw. 2a ist.

4.1 Berechnen Sie zunächst das Volumen $v(a)$ des Quaders in Abhängigkeit von der Länge a. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge an.

$\left[\text{Teilergebnis}: v(a) = 36a^2 - 6a^3\right]$ (6 BE)

4.2 Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von a, für den das Volumen V des Quaders sein absolutes Maximum annimmt. Berechnen Sie auch das maximale Volumen.(5 BE)

27. Ein Pralinenhersteller verkauft 60.000 Schachteln pro Monat für je 6.50€. Die Herstellungskosten sind 3.50€ pro Schachtel. Die monatlichen Fixkosten sind 80.000. Er geht davon aus, dass sich sein Umsatz pro Euro Preisreduzierung um 30.000 Schachteln erhöhen wird. Bei welcher Preisreduzierung wird sein Gewinn optimal?