

Klug ist, wer nur die Hälfte von dem glaubt, was er hört.
Noch klüger, wer erkennt, welche Hälfte die richtige ist.
(deutsches Sprichwort)

§ 15 Aufstellen von Funktionstermen

In diesem Abschnitt geht es darum, dass man zu gegebenen oder gewünschten Eigenschaften eines Funktionsgraphen den passenden Funktionsterm bestimmt.

Also in etwa so: Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion 3. Grades mit dem Hochpunkt $HP(0|2)$ und dem Wendepunkt $WP(-1|-1)$.

15.1 Lösen linearer Gleichungssysteme

Das Lösen linearer Gleichungssysteme kennt man vielleicht noch von früher. Dabei hatte man meist zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Also in etwa so:

$$2x + 3y = -1$$

$$x - 2y = 3$$

Um die Werte der Unbekannten x und y zu ermitteln hat man dann das Einsetzverfahren, Gleichsetzverfahren oder Additionsverfahren angewendet. Die ersteren beiden Verfahren werden wir hier nicht machen, da diese bei „größeren“ Gleichungssystemen (also drei Gleichungen mit drei Unbekannten) nicht mehr praktikabel sind.

Wir lösen somit Gleichungssysteme ausschließlich mit dem Additionsverfahren (wobei auch subtrahiert werden kann!).

Ziel dabei ist es, eine der Unbekannten (x oder y) zu eliminieren. Dazu benötigt man bei beiden Gleichungen vor einer der Unbekannten, bis auf das Vorzeichen, denselben Koeffizienten.

Also multipliziert man die zweite Gleichung mit dem Faktor 2, damit vor dem x derselbe Koeffizient steht.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = -1 \\ x - 2y = 3 \quad | \cdot 2 \\ \hline 2x + 3y = -1 \\ 2x - 4y = 6 \end{array}$$

Die nun so entstandenen Gleichungen kann man nun addieren (wenn die Koeffizienten unterschiedliche Vorzeichen haben) oder wie in unserem Fall subtrahieren (wenn die Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben).

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = -1 \\ 2x - 4y = 6 \\ \hline 7y = -7 \quad | :7 \\ y = -1 \end{array}$$

Den so erhaltenen Wert für y setzt man nun in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein und erhält den gesuchten Wert für x .

$$\begin{array}{r} x - 2 \cdot y = 3 \\ x - 2 \cdot (-1) = 3 \\ x + 2 = 3 \quad | -2 \\ x = 1 \end{array}$$

Etwas einfacher und weniger schreibintensiv kann man obiges Verfahren auch so durchführen:

Beispiel 1: Lösen Sie folgendes lineares 2×2 -Gleichungssystem

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = -1 \\ x - 2y = 3 \quad | \cdot 2 \\ \hline 2x + 3y = -1 \\ 2x - 4y = 6 \\ \hline 7y = -7 \Rightarrow y = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

Diese Methode führt sehr rasch zu einem Ergebnis. Allerdings bedarf es einiger Übung.

Aufgaben

1.0 Bestimmen Sie die Lösung für die Unbekannten in dem jeweiligen Gleichungssystem

1.1 $x + y = 5$
 $4x - 3y = -1$

1.2 $2a - 8b = -8$
 $3a + 4b = 20$

1.3 $7a + 3b = 12$
 $4a - 5b = 27$

1.4 $a + 4b = 4$
 $7a + 6b = -5$

1.5 $8x + 17y = 42$
 $2x + 19y = 40$

Dieses Verfahren funktioniert auch bei 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten (3x3-Gleichungssysteme).

Beispiel 2: Lösen Sie folgendes lineares 3x3-Gleichungssystem

$$\begin{array}{r}
 a + b + c = -1 \\
 2a + 3b + c = 0 \\
 5a - b + 2c = 1 \\
 \hline
 -a - 2b = -1 \\
 -3a + 3b = -3 \\
 \hline
 -9a = -9 \Rightarrow \underline{\underline{a=1}}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \cdot 2 \\ - \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} \cdot 3 \\ + \\ \cdot 2 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 - \\
 + \\
 -
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \cdot 2 \\ - \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} \cdot 3 \\ + \\ \cdot 2 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 - \\
 + \\
 -
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 1 + 0 + c = -1 \Rightarrow \underline{\underline{c = -2}} \\
 -3 + 3b = -3 \Rightarrow \underline{\underline{b = 0}}
 \end{array}$$

Da muss man sich nun schon noch etwas mehr konzentrieren! Wichtig dabei ist, dass man die Unbekannten immer ordentlich untereinander schreibt und deren Anzahl immer um eins reduziert. Dabei formt man so um, dass aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten ein Gleichungssystem entsteht mit zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (Aus drei mach zwei und aus zwei mach eins!).

Aufgaben

2.0 Bestimmen Sie die Lösung für die Unbekannten in dem jeweiligen Gleichungssystem

2.1 $2x - y + 3z = -1$
 $x + 5y - 2z = -4$
 $3x - 2y + z = -5$ $\mathbb{L} = \{(-2 | 0 | 1)\}$

2.2 $4x + 7y + 12z = -5$
 $-2x + 3y - 4z = -4$
 $2x + y + 9z = 0$ $\mathbb{L} = \{(\frac{1}{2} | -1 | 0)\}$

2.3 $2a + 3b + c = 0$

$$a + b + c = -1 \quad \mathbb{L} = \{(1|0|-2)\}$$

$$5a - b + 2c = 1$$

2.4 $2a - b + 3c = -1$

$$a + 5b - 2c = -4 \quad \mathbb{L} = \{(-2|0|1)\}$$

$$3a - 2b + c = -5$$

2.5 $4x + 7y + 12z = -5$

$$-2x + 3y - 4z = -4 \quad \mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{2} | -1 | 0 \right) \right\}$$

$$2x + y + 9z = 0$$

2.6 $3x - 2y + z = -2$

$$6x + y - 3z = 11 \quad \mathbb{L} = \{(1|2|-1)\}$$

$$7x - 4y + 4z = -5$$

2.7 $10a - 2b + 8c = -4$

$$5a + 5b + 7c = 16 \quad \mathbb{L} = \{(2|4|-2)\}$$

$$15a - 6b + 6c = -6$$

2.8 $3a - 5b + 6c = 12$

$$4a + 2b - c = -11 \quad \mathbb{L} = \{(-2|0|3)\}$$

$$-a + 6b = 2$$

2.9 $-0,5a + 4b - 2c = 19$

$$3a + 6c = 0 \quad \mathbb{L} = \{(6|4|-3)\}$$

$$8a + 3b - 4c = 72$$

2.10 $8x + 6y + 12z = 2$

$$-16x - 4y + 8z = -8 \quad \mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{4} | \frac{1}{2} | -\frac{1}{4} \right) \right\}$$

$$10x + 2y + 2z = 3$$

3.0 Bestimmen Sie die Lösung für die Unbekannten in dem jeweiligen Gleichungssystem

3.1 $3a - c + 2d = 3$

$$a + 2b - 4c + 5d = -1 \quad \mathbb{L} = \{(2|3|1|-1)\}$$

$$2a - 3b + 4c = -9$$

$$0,5a - 1,5b + 2,5c + 4d = -5$$

3.2 $a - b + 2c - 2d = -9$

$$3b + 4c - d = 3 \quad \mathbb{L} = \{(0|3|-1|2)\}$$

$$3a - 2b + 3c = -9$$

$$4a + 2b - c + d = 9$$

15.2 Aufstellen von Funktionstermen

kehrt man die Kurvendiskussion um, so soll jetzt aus vorgegebenen Eigenschaften eines Funktionsgraphen der entsprechende Funktionsterm ermittelt werden.

Dazu setzt man den Funktionsterm mit allgemeinen Koeffizienten a, b, c, \dots an und erstellt für die geforderten Eigenschaften ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die Koeffizienten des zu ermittelnden Funktionsterms liefert.

Hat man drei Koeffizienten zu bestimmen, so benötigt man auch drei Gleichungen; für vier Koeffizienten benötigt man vier Gleichungen usw. Um den Funktionsterm eindeutig zu bestimmen muss das entsprechende Gleichungssystem auch eine eindeutige Lösung liefern. Folgende Zusammenfassung soll das „Übersetzen“ einer Eigenschaft des Graphen G_f in eine entsprechende (Funktions-) Gleichung erleichtern.

Eigenschaft	Gleichung
$A(x_A y_A)$ ist Kurvenpunkt von G_f	$f(x_A) = y_A$
Tangentensteigung in x_T ist m	$f'(x_T) = m$
x_E ist Extremstelle	$f'(x_E) = 0$
x_W ist Wendestelle	$f''(x_W) = 0$

Wie man aus einer entsprechenden Eigenschaft/Information die dazugehörige Gleichung aufstellt, wollen wir zunächst an einigen (wichtigen) Beispielen verdeutlichen.

Gesucht ist also eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit den folgenden Eigenschaften
.....

Dann gibt man zunächst einen allgemeinen Funktionsterm $f(x)$ an und bildet davon die 1. und die 2. Ableitung.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

- Der Graph der Funktion f verläuft durch den Koordinatenursprung $O(0|0)$.

Diese Eigenschaft liefert sofort einen gesuchten Koeffizienten! Da der Punkt O Kurvenpunkt ist, müssen seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$$

- Der Graph der Funktion f besitzt den relativen Tiefpunkt $T(2|-1)$

Diese Eigenschaft liefert gleich zwei Gleichungen!

T ist Kurvenpunkt:

$$f(2) = -1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -1 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 2c + d = -1$$

T ist auch relativer Extrempunkt. Somit hat der Graph an der Stelle $x = 2$ eine

waagrechte Tangente.

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$$

Bemerkung: Ob es sich um einen relativen Tiefpunkt oder einen relativen Hochpunkt handelt ist hier unerheblich!

3. Der Graph der Funktion f besitzt den Wendepunkt $W(-1|3)$.

Diese Eigenschaft liefert ebenfalls zwei Gleichungen!

W ist Kurvenpunkt:

$$f(-1) = 3 \Rightarrow a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 3 \Rightarrow -a + b - c + d = 3$$

W ist Wendepunkt. Somit hat der Graph an der Stelle $x = -1$ keine Krümmung.

$$f''(-1) = 0 \Rightarrow 6a \cdot (-1) + 2b = 0 \Rightarrow -6a + 2b = 0$$

4. Der Graph der Funktion f besitzt den Terrassenpunkt $TeP(1|0)$.

Diese Eigenschaft liefert gleich drei Gleichungen!

TeP ist Kurvenpunkt:

$$f(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0$$

TeP ist Wendepunkt. Somit hat der Graph an der Stelle $x = 1$ keine Krümmung.

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 1 + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$$

TeP hat eine waagrechte Tangente

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$$

5. Der Graph der Funktion f besitzt an der Stelle $x = 3$ die Wendetangente mit der Gleichung $y = -2x + 4$.

Mit dieser Information lassen sich drei Gleichungen bestimmen.

Da es an der Stelle $x = 3$ einen Wendepunkt gibt, gilt:

$$f''(3) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 3 + 2b = 0 \Rightarrow 18a + 2b = 0$$

Die y -Koordinate des Wendepunkts lässt sich mit der Tangentengleichung bestimmen.

$$\text{Dabei gilt: } y = -2 \cdot 3 + 4 = -2 \Rightarrow \text{WP}(3|-2)$$

Somit folgt:

$$f(3) = -2 \Rightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = -2 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = -2$$

Die Steigung der Wendetangente gibt die Steigung des Graphen der Funktion f an der Wendestelle $x = 3$ an.

$$f'(3) = -2 \Rightarrow 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c = -2 \Rightarrow 27a + 6b + c = -2$$

6. Der Graph der Funktion f berührt den Graph der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ an der Stelle $x = 2$.

Wenn sich zwei Funktionsgraphen berühren, dann haben sie einen gemeinsamen Schnittpunkt und an dieser Stelle dieselbe Steigung.

Also gilt:

$$f(2) = g(2) \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = -5$$

$$\text{Es gilt: } g'(x) = -x - 2$$

Damit folgt:

$$f'(2) = g'(2) \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = -2 - 2 \Rightarrow 12a + 4b + c = -4$$

Hat man nun alle Gleichungen „aufgestellt“, muss man das so entstandene Gleichungssystem noch lösen.

Aufgaben

1. Bestimme eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:
 $M(0|0)$ ist lokaler Hochpunkt und $W(-1|-2)$ ist Wendepunkt.

Ergebnis: $f(x) = -x^3 - 3x^2$

2. Bestimme eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:
 Bei $x = -2$ schneidet der Graph die x -Achse, bei $x = 0$ ist ein Wendepunkt, die Wendetangente hat die Gleichung $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2$

3. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph an der Stelle $x = 0$ parallel verläuft zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten und bei $T(1|1)$ einen Terrassenpunkt hat.

Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3}$

4. (AP A II 1993) Gegeben ist die reelle Funktion h mit $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ in der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion h wird mit G_h bezeichnet.

Der Graph G_h enthält die Punkte $P(2|-3)$ und $Q(4|3)$. Die Tangente an den Graphen G_h im Punkt $U(0|y_U)$ verläuft parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{9}{4}x$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $h(x)$

Ergebnis: $h(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x$

5. (AP A I 2000) Der Graph G_g der reellen Funktion $g : x \mapsto g(x)$; $D_g = \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + ax^2 + bx + c)$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0 = 2$ und hat den relativen Tiefpunkt $T(4|-5)$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $g(x)$.

Ergebnis: $g(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + 15x^2 - 72x + 92)$

6. (AP A I 2006) Der Graph einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades hat den Wendepunkt $W(0|5)$ und verläuft durch den Punkt $P(1|8)$. Die Wendetangente enthält den Punkt $Q(-1,25|0)$.

Zeigen Sie zunächst, dass die Wendetangente die Steigung $m_t = 4$ hat. Bestimmen Sie nun den Funktionsterm $h(x)$.

Ergebnis: $h(x) = -x^3 + 4x + 5$

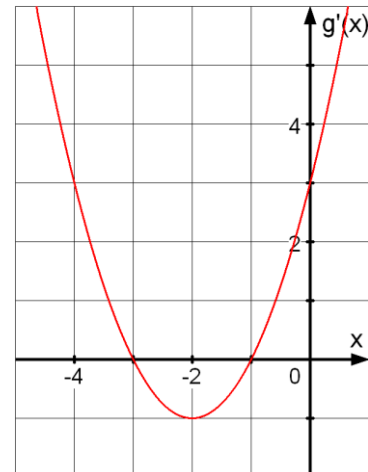
7. (AP A II 2007) Gegeben ist weiter die reelle Funktion $h : x \mapsto h(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + c$ mit reellen Konstanten a, b und c sowie $ID_h = \mathbb{R}$. Der Graph G_h dieser Funktion schneidet den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 4)^2$ auf der y-Achse und besitzt bei $x_0 = -2$ einen Terrassenpunkt.

Berechnen Sie den Funktionsterm $h(x)$ der Funktion h .

Ergebnis: $h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2$

8. (AP A II 2009) Nebenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades an:
Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion g einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt.

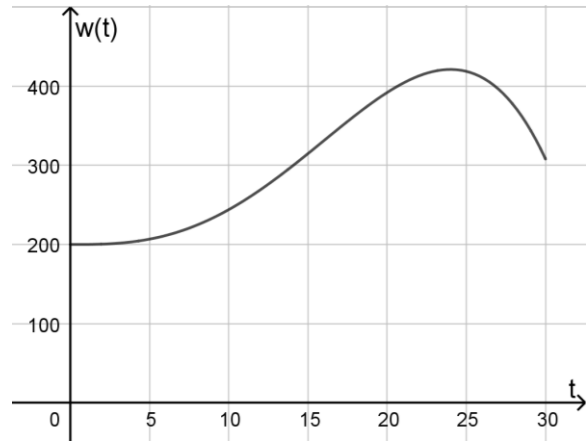
Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten zunächst den Funktionsterm $g'(x)$ und ermitteln Sie anschließend den Funktionsterm $g(x)$ derjenigen Funktion g , deren Wendepunkt auf der x-Achse liegt.



9. Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse, besitzt den relativen Hochpunkt $H(2|2)$ und schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|-2)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.

Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 2$

10. (AP A II Teil 2 2019) Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion w mit der Funktionsgleichung $w(t) = at^4 + bt^3 + c$ mit geeigneten Werten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und der Definitionsmenge $D_w = [0; 30]$



beschrieben werden.

Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Der Funktionswert $w(t)$ gibt den Wasserstand des Flusses in cm an.

Zu Monatsbeginn lag der Wasserstand bei 200 cm und am Monatsende bei 308 cm. Der höchste Wasserstand wurde am 25. März – also zum Zeitpunkt $t_{\max} = 24$ – gemessen.

Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand $w(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t .

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnung kann verzichtet werden.

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a , b und c und damit die zugehörige Funktionsgleichung von w .

11. (AP A I Teil 2 2020) Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt eines Springbrunnens. Dieser hat eine kreisförmige Grundfläche mit einem Durchmesser von 4 m. Die Oberflächenlinie der im Querschnitt dargestellten Auffangwanne wird durch den Graphen G_g einer ganzrationalen Funktion g vierten Grades mit der

Definitionsmenge $D_g = [-2; 2]$

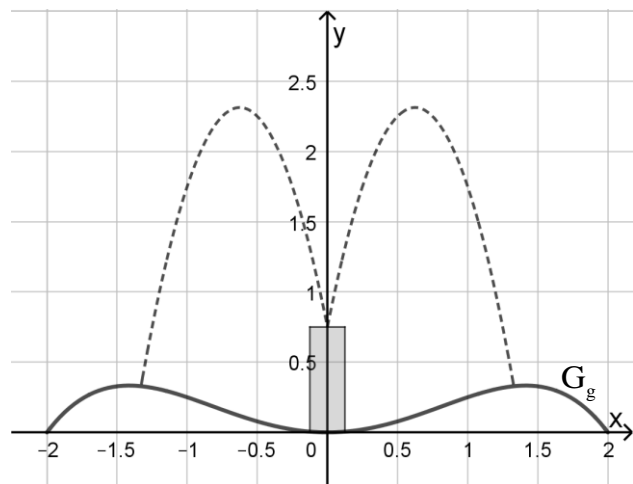
beschrieben. Der Graph G_g in einem

kartesischen Koordinatensystem ist achsensymmetrisch zur y -Achse.

Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Meter dar.

Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g . Entnehmen Sie dazu geeignete Werte aus der Zeichnung.



Ergebnis: $g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2$