Es ist nicht genug zu wissen –
man muss auch anwenden.
Es ist nicht genug zu wollen –
man muss auch tun.
(Johann Wolfgang Goethe)

§ 14 Anwendungsaufgaben

Viele reale Zusammenhänge/Vorgänge des alltäglichen Lebens/Umgebung lassen sich, in gewissen Grenzen, idealisiert mathematisch modellieren. Dabei kann, durch eine sich ändernde Größe „x“ (Länge, Entfernung, Abstand, Höhe, …) oder auch „t“ (Zeit), eine davon abhängige Größe f (oder auch A, V, …) mit Hilfe eines Funktionsterms $f(x)$ oder $f(t)$ berechnet werden. Je nach Fragestellung bzw. Problematik kann man dann mit den Mitteln der Differentialrechnung Antworten/Lösungen ermitteln.

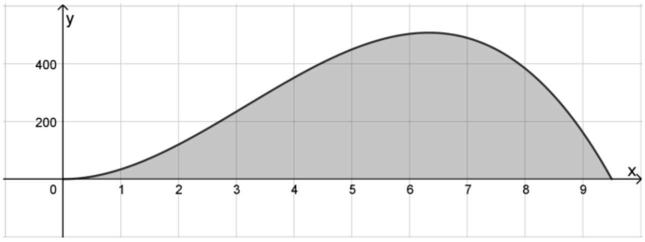
Aber am besten machen wir einfach einige Beispiele dazu.

Aufgaben

1.0 Das Profil eines Berges ist in nebenstehender Abbildung dargestellt und kann im eingezeichneten Bereich durch die Funktion f mit

$f(x) = -0,004x^3 + 0,038x^2$

beschrieben werden. Dabei gibt x (in km) die Entfernung in waagrechter Richtung und f die Höhe (in km) des Berges an der Stelle x an.



1.1 Berechnen Sie zunächst die Querschnittslänge des Berges und geben Sie damit die Definitionsmenge D der Funktion f an.

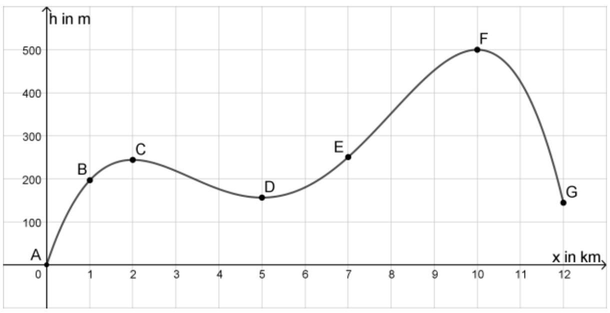
1.2 Bestimmen Sie die Höhe des Berges und ermitteln Sie die durchschnittliche Steigung vom Tal (Koordinatenursprung) bis zum Gipfel.

1.3 Ermitteln Sie den maximalen Anstieg, den ein Wanderer (von West nach Ost) überwinden muss.

2.0 Das Höhenprofil einer Wanderroute (siehe nebenstehende Graphik) lässt sich annähernd durch den Graphen der Funktion h mit

$h(x) = -0,75x^4 + 17x^3 - 120x^2 + 300x$

und $x \in [0;12]$ darstellen.



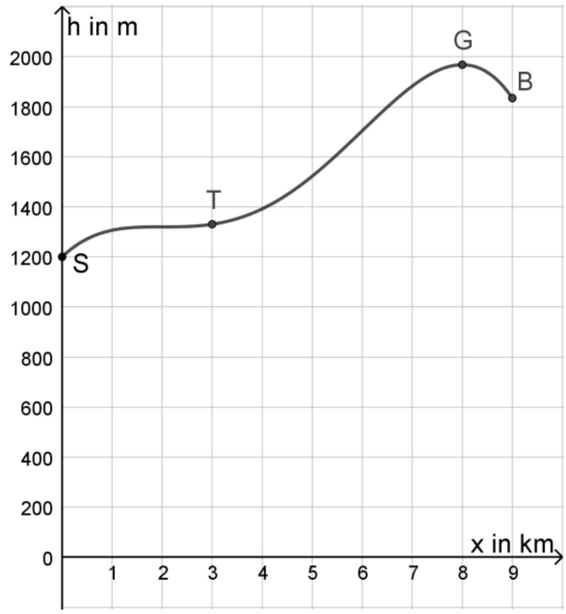
2.1 Berechnen Sie zunächst die durchschnittliche Steigung auf den Streckenabschnitten $\overline{AC}$ und $\overline{DF}$.

2.2 Ermitteln Sie die momentane Steigung in den Punkten B und E.

2.3 Geben Sie mit Hilfe obiger Abbildung diejenige Stelle an, in welcher die momentane Steigung am größten ist.

2.4 An den beiden höchsten Punkten der Wanderroute befindet sich jeweils eine Berghütte. Berechnen Sie die Höhe dieser Berghütten, wenn die Wanderroute in einer Höhe von 750 m über N. N. beginnt.

3.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt das Höhenprofil einer Bergtour. Der Verlauf des Graphen kann durch die Funktion h mit $h(x) = -1{,}5x^4 + 24x^3 - 108x^2 + 192x + 1200$ beschrieben werden. Dabei gibt x die Wegstrecke in km an und $h(x)$ die Höhe über N. N.
S markiert den Startpunkt und B das Ende der Tour.



3.1 Entnehmen Sie der Zeichnung die Definitionsmenge D_h .

3.2 Ein Teil der Tour hätte man auch mit einer Seilbahn überwinden können, die von T (Talstation) bis nach B (Bergstation) führt. Berechnen Sie, welchen Höhenunterschied die Seilbahn überwindet.

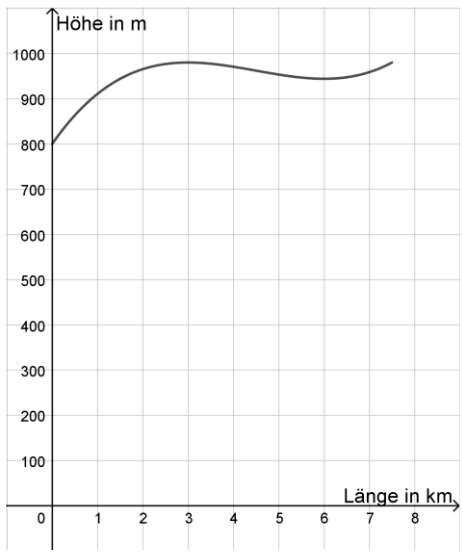
3.3 Berechnen Sie nach welcher Wegstrecke der höchste Punkt der Tour erreicht wird und ermitteln Sie die zu überwindenden Höhenmeter.

3.4 Ermitteln Sie die maximale und die minimale Steigung (in Prozent) der Bergtour zwischen Startpunkt S und Gipfel (G).

3.5 Ermitteln Sie, bei welcher Wegstrecke die Tour genauso steil ansteigt wie zu Beginn der Wanderung.

4. **AP NT 2020 AII**

1.0 Ein Teilstück einer Langlaufloipe verläuft von oben betrachtet geradlinig und hat im Querschnitt das abgebildete Profil, welches Annähernd durch den Graphen der Funktion $f: x \mapsto 8\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = [0;7{,}5]$ beschrieben werden kann. Die x-Achse gibt die Länge in waagrechter Richtung an, auf der y-Achse ist die Höhe über dem Meeresspiegel aufgetragen. Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Kilometer bzw. Meter dar.



1.1 Ermitteln Sie die maximalen Teilintervalle von D_f, in denen die Loipe auf- bzw. abwärts verläuft.

1.2 Berechnen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe 1.1, in welcher horizontalen Entfernung vom Beginn des Teilstückes der Loipe maximale Höhe erreicht wird. Geben Sie an, in welcher Höhe Sporttreibende sich am höchsten Punkt der Loipe befinden.

1.3 Ermitteln Sie, nach wie vielen Kilometern in horizontaler Entfernung vom Ausgangspunkt die Loipe am steilsten abwärts verläuft.

1.4 Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Loipe in Prozent auf den ersten drei Kilometern.

1.5 Die Steigung der Loipe bei Kilometer 2 tritt im weiteren Verlauf der Loipe noch einmal auf. Berechnen Sie die Stelle, an der dies der Fall ist.

5.0 Die Konzentration eines Medikamentenwirkstoffes im Blut in Abhängigkeit von der Zeit kann durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(t) = -0{,}001t^4 + 0{,}03t^3 - 0{,}3t^2 + t$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit nach Einnahme des Medikaments in Stunden und $f(t)$ die Konzentration des Medikaments im Blut in $\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ an.

5.1 Berechnen Sie $f'(1)$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang.

5.2 Bestimmen Sie nach welcher Zeit die Konzentration ihren höchsten Wert erreicht und geben Sie die maximale Konzentration an.

5.3 Zeigen Sie, dass nach Erreichen des Konzentrationshöchstwerts diese bis zur Konzentration 0 kontinuierlich abnimmt. Nach welchem Zeitpunkt ist dies erreicht?

5.4 Zeichnen Sie für $0 \le t \le 10$ den Graph der Funktion f.
Maßstab: $1\text{h} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$; $1{,}0\frac{\text{mg}}{\text{ml}} \mathrel{\hat{=}} 10\text{cm}$

5.5 Die Wirksamkeit des Medikaments ist nur dann gewährleistet, wenn die Konzentration einen Wert von mindestens $0{,}15\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ besitzt. Entnehmen Sie der Zeichnung die Wirksamkeit des Medikaments.

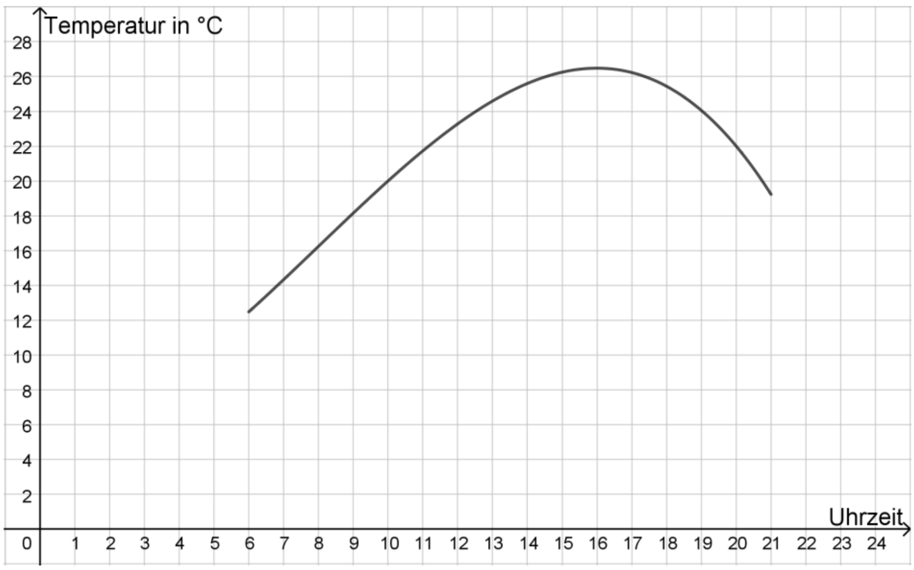
6.0 Pflanzen produzieren bei der Photosynthese Sauerstoff, den sie an ihre Umgebung abgeben. Wir betrachten nun diesen Vorgang für einen Baum an einem bestimmten Tag zwischen 6 Uhr morgens (Sonnenaufgang) und 20Uhr abends (Sonnenuntergang). Die Menge des produzierten Sauerstoffs kann durch eine Funktion V mit $V(t) = -t^3 + 21t^2$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Stunden an, die seit dem Sonnenaufgang vergangen sind und $V(t)$ gibt an, wie viel Sauerstoff der Baum bis zum Zeitpunkt t insgesamt produziert hat.

6.1 Geben Sie die Definitionsmenge D der Funktion V an und bestimmen Sie, wie viel Sauerstoff der Baum bis 12 Uhr produziert hat.

6.2 Zeigen Sie, dass der Baum durchschnittlich 98 Liter Sauerstoff pro Stunde produziert und bestimmen Sie die Uhrzeiten zu welchen die momentane Sauerstoffproduktion 98 Liter pro Stunde beträgt.

6.3 Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Sauerstoffproduktion am größten ist. Berechnen Sie damit, wie groß zu diesem Zeitpunkt die Sauerstoffproduktion pro Minute ist.

7.0 In modernen Wetterstationen werden Daten über die Lufttemperatur (kurz Temperatur) durch elektronische Messautomaten erfasst. Zu den gemessenen Daten können sie für einen bestimmten Tageszeitraum einen Funktionsterm angeben, welcher modellhaft den Temperaturverlauf darstellt.
An einem bestimmten Tag erhält man in der Zeit von 6.00 Uhr bis 21.00 Uhr die Funktion f mit $f(t) = -0,01t^3 + 0,24t^2 + 6$. Sie stellt für $6 \le t \le 21$ modellhaft den Temperaturverlauf dar (siehe Abbildung). Dabei wird die Uhrzeit t in Stunden und die Temperatur $f(t)$ in °C angegeben.



7.1 Berechnen Sie die Temperatur zu Beginn und am Ende des vorgegebenen Zeitintervalls.

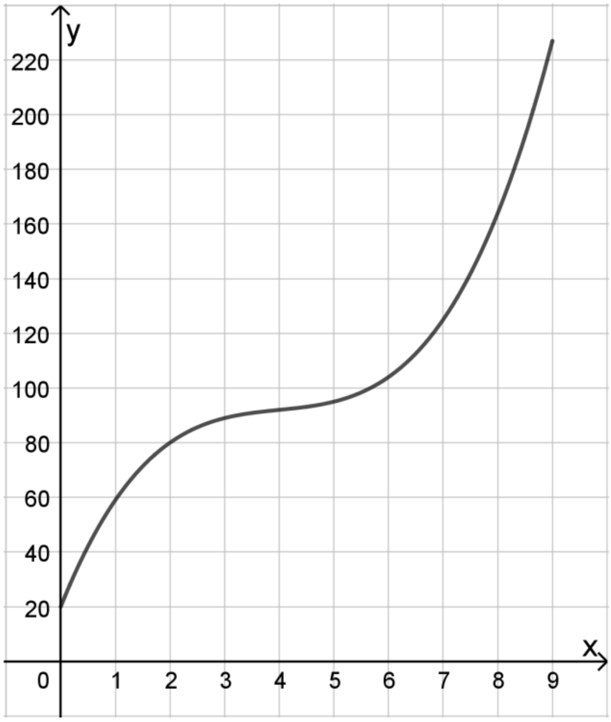
7.2 Ermitteln Sie den Tageshöchstwert der Temperatur.

7.3 Der Wendepunkt W des Graphen der Funktion f hat die Koordinaten $W(8 | f(8))$ (Nachweis nicht erforderlich!).
Berechnen Sie $f'(8)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.
Erklären Sie, welche Bedeutung der x-Wert des Wendepunktes im Zusammenhang mit der sich während des Tages verändernden Temperatur besitzt.

7.4 Ermitteln Sie zeichnerisch mit Hilfe obiger Abbildung in welchem Zeitraum die Tagestemperatur mindestens 20°C betrug.

8. **Abitur 2018 Prüfungsteil B Aufgabengruppe 2 (Gymnasium Bayern)**

2 Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K: x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0;9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1.000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von K



a) Geben Sie mithilfe obiger Abbildung

α) die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125.000 Euro betragen.

β) das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \leq x \leq 9$ den Erlös (in 1.000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannten Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

b) Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.

c) Zeichnen Sie den Graphen von E in obige Abbildung ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

d) Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.

9.0 Ein Pharmaunternehmen stellt das Medikament TABLETTE her, welches für 20 Euro pro Stück abgesetzt werden kann. Nach bisherigen Erfahrungen weiß man, dass sich die Produktionskosten durch die Funktion K mit $K(x) = -x^3 - 10x^2 + 35x + 18$ berechnet werden können. Dabei gibt x die Menge der produzierten Medikamente in 1000 Mengeneinheiten und K einen Betrag in 1000 Euro an.

9.1 Geben Sie die Erlösfunktion E an und bestimmen Sie damit einen Funktionsterm G, der den Gewinn des Unternehmens bezüglich dieses Medikaments angibt.

9.2 Ermitteln Sie, für welche Stückzahlen das Unternehmen ein Gewinn macht.

9.3 Bestimmen Sie, bei welcher Stückzahl der Gewinn maximal ist. Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

9.4 Erklären Sie, welche Bedeutung der Tiefpunkt des Graphen der Funktion G hat.

10. Die FOTO AG möchte mit einer neuartigen Digitalkamera den Markt erobern. Die Kosten für die Produktion von x Kameras in einem Monat können durch die ganzrationale Funktion K mit $K(x) = 0{,}1x^3 - 8{,}2x^2 + 415{,}5x + 264{,}6$ beschrieben werden. Eine fertige Kamera wird zu einem Preis von 300 Euro an den Zwischenhändler verkauft.
Nehmen Sie Stellung zur Aussage des Unternehmensberaters: „Mit diesem Produkt können Sie keinen Gewinn erzielen.“