Die Qualität des Charakters
ist die Summe
der erworbenen Werte.
(Michael Dur, dt. Buchautor)

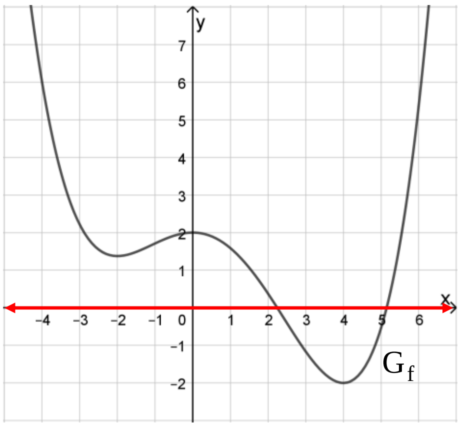
§ 13 Wertemenge einer Funktion

13.1 Die Definitionsmenge

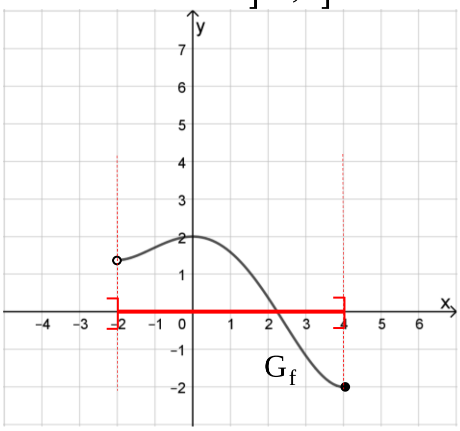
Die Definitionsmenge D einer Funktion f gibt die Menge der zugelassenen x-Werte an, d.h. die x-Werte, die man in den Funktionsterm $f(x)$ einsetzen darf. Das hat natürlich dann Einfluss auf den Bereich des Graph der Funktion, der in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden darf.
Zumeist wird als Definitionsmenge die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ verwendet, vereinzelt kann die Defintionsmenge aber auch mal eingeschränkt sein.

Hier kurz ein Beispiel um zu verdeutlichen, welchen Einfluss die Defintionsmenge auf das „Bild“ des Funktionsgraphen hat.
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x)=\frac{3}{128}x^4-\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2$ und der Definitionsmenge D.
In den Abbildungen unten sind die zur Definitionsmenge D gehörenden Funktionsgraphen abgebildet.
In rot sind die Bereiche auf der x-Achse gekennzeichnet, in dem der Graph gezeichnet werden darf. Diese entsprechen der jeweiligen Definitionsmenge D.
Je nach Defintionsmenge ergeben sich unterschiedliche Ausschnitte!

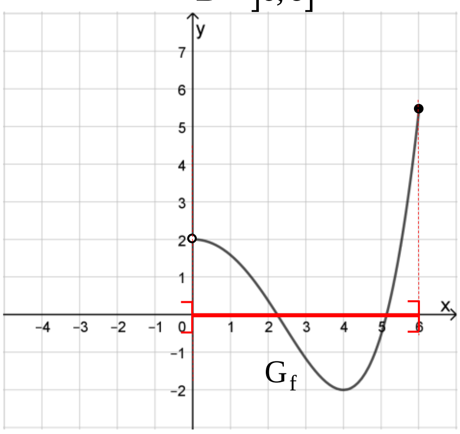
$D=\mathbb{R}$



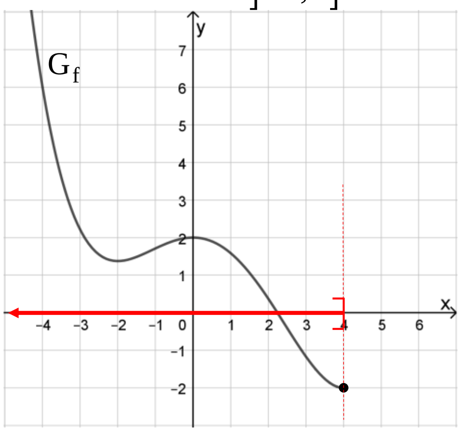
$D=]-2;4]$



$D=]0;6]$



$D=]-\infty;4]$

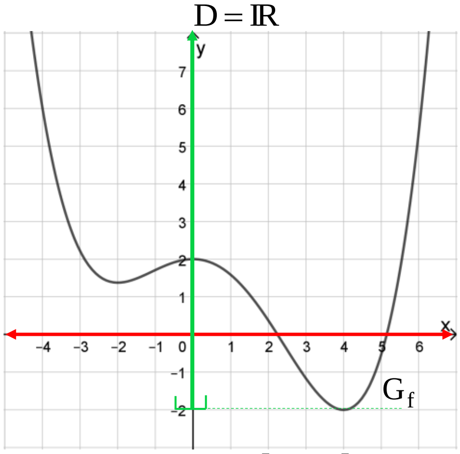


Die Wahl der Definitionsmenge beeinflusst dann aber auch die möglichen y-Werte, die der Funktionsgraph „erreichen“ bzw. annehmen kann. Die Menge dieser Zahlen nennt man dann die Wertemenge W der Funktion f.

13.2 Die Wertemenge

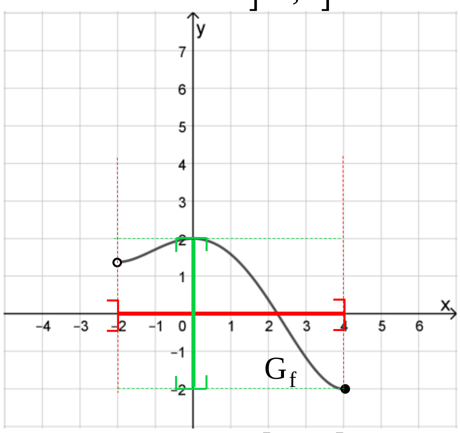
Die Wertemenge einer Funktion f gibt die Menge der möglichen y-Werte einer Funktion f an. Diese kann, je nach Wahl der Definitionsmenge unterschiedlich sein.
Betrachten wir wieder die Funktion f (siehe 13.1) mit $f(x) = \frac{3}{128}x^4 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2$ und der Definitionsmenge D.
In grün sind nun die Werte auf der y-Achse gekennzeichnet, die als Funktionswert angenommen werden. Diese legen die Wertemenge W fest.

$D = \mathbb{R}$



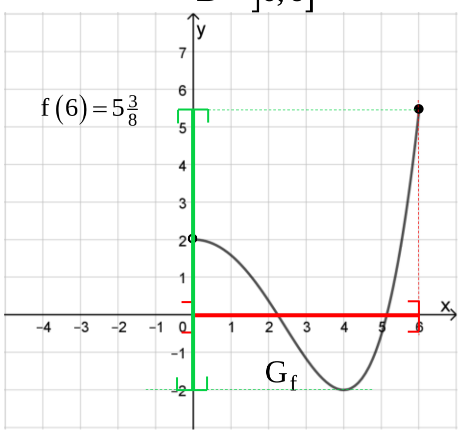
$W = [-2; \infty[$

$D =]-2; 4]$



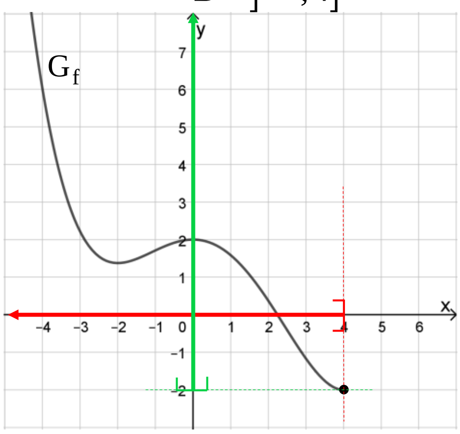
$W = [-2; 2]$

$D =]0; 6]$



$W = \left[-2; 5\frac{3}{8}\right]$

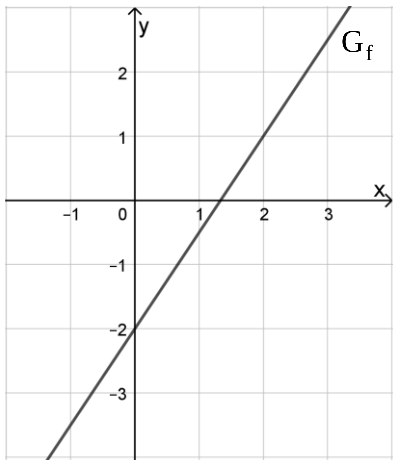
$D =]-\infty; 4]$



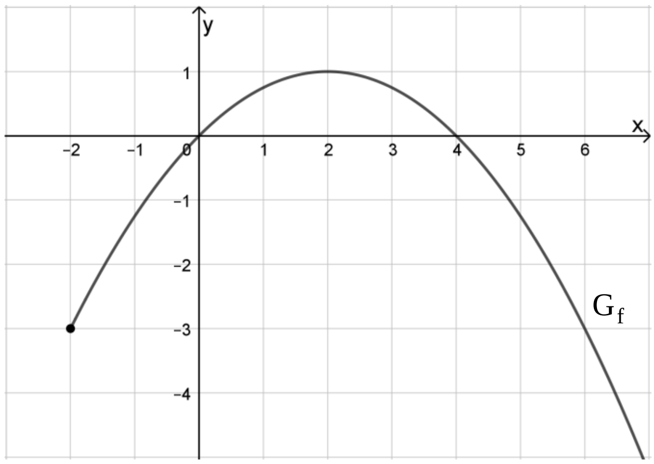
$W = [-2; \infty[$

Übung: Gegeben ist die Funktion f mit der Definitionsmenge D. Geben Sie mit Hilfe der Abbildung die Wertemenge W der Funktion f an.

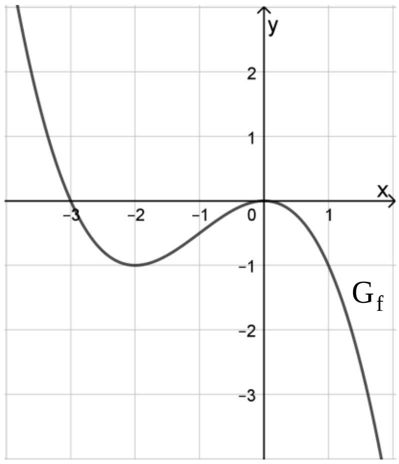
1. $f(x) = 1{,}5x - 2;\quad D_f = \mathbb{R}$



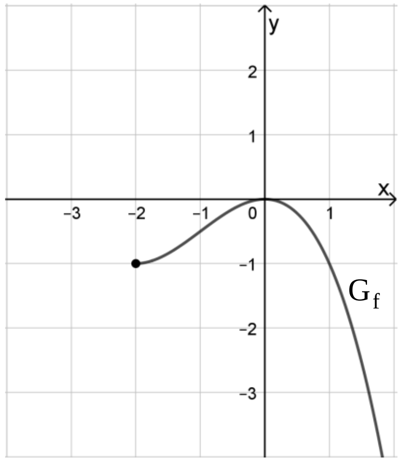
2. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x;\quad D_f = [-2;\infty[$



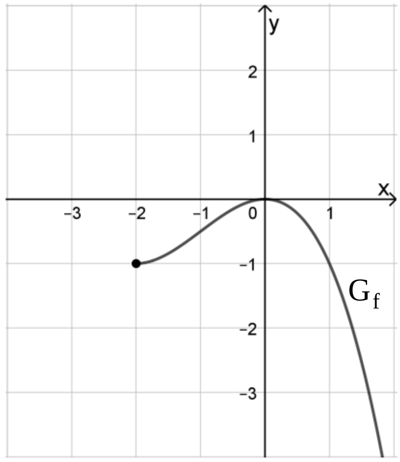
3. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 \cdot (x+3);\quad D_f = \mathbb{R}$



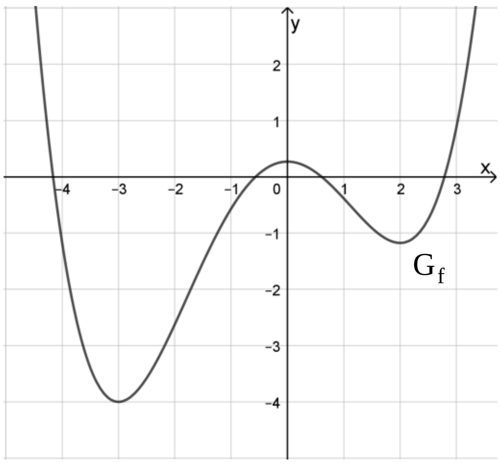
4. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 \cdot (x+3)$; $D_f = [-2;\infty[$



5. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 \cdot (x+3)$; $D_f = [-2;2[$



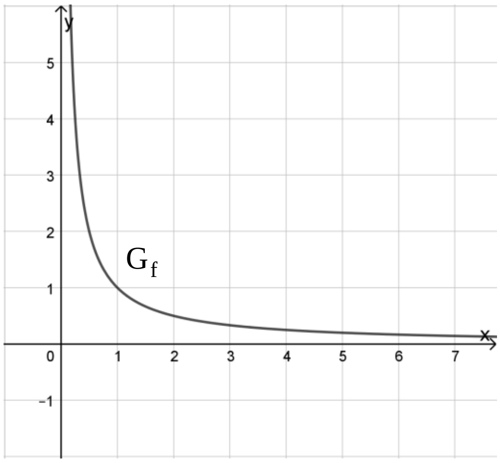
5. $f(x) = \frac{16}{59} \cdot \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 1\right)$; $D_f = \mathbb{R}$



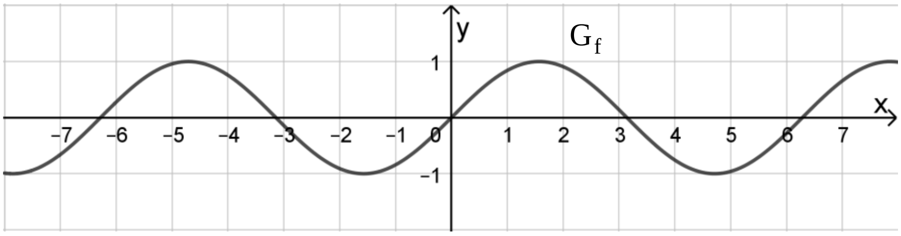
6. $f(x) = \frac{16}{59} \cdot \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 1\right)$; $D_f = [-2;\infty[$

7. $f(x) = \frac{16}{59} \cdot \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 1\right)$; $D_f = [-1;3]$

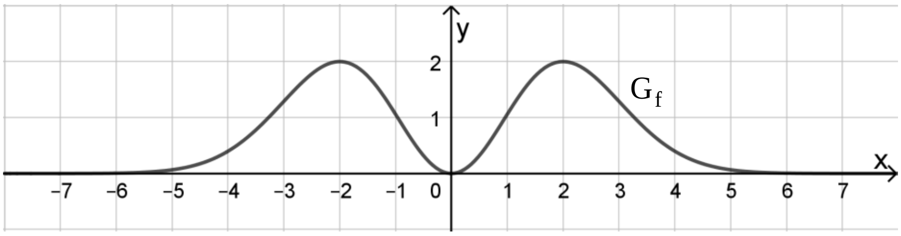
8. $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f =]0;\infty[$



8. $f(x) = \sin(x)$; $D_f = \mathbb{R}$



9. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{1-\frac{1}{4}x^2}$; $D_f = \mathbb{R}$



Hat man den Graphen der Funktion f gegeben, so ist es in der Regel gar nicht so schwer die Wertemenge einer Funktion f anzugeben.
Ist der Graph der Funktion f allerdings nicht gegeben bzw. bekannt, dann wird das Ganze schon schwieriger.
Aber wir haben in obigen Beispielen gesehen, dass das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge eine wichtige Rolle spielt bzw. spielen kann.

Daher benötig man zur Bestimmung der Wertemenge einer Funktion f

- das Verhalten der Funktionswerte für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$ (falls der Rand der Definitionsmenge $-\infty$ und/oder $+\infty$ ist).
- oder die Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge.
- und das absolute Maximum bzw. absolute Minimum in dem betrachteten Intervall.

Bemerkung: Dabei gehen wir davon aus, dass die Definitionsmenge aus nur einem zusammenhängenden Intervall besteht und die Funktion stetig ist (d.h. der Graph der Funktion f hat keine Sprünge!). Sollte die Definitionsmeng aus mehreren Teilintervallen bestehen, dann muss für jedes Teilintervall einzeln die Wertemenge bestimmt werden.

13.3 Absolutes Maximum/Minimum

Eine Bemerkung vorneweg. Ein absolutes Maximum bzw. absolutes Minimum kann es geben, muss es aber nicht geben.

Der Graph einer Funktion f besitzt genau dann ein absolutes Maximum y_{max}, wenn es keine Funktionswerte gibt, die größer sind als dieses. D.h. das absolute Maximum y_{max} ist der absolut größte y-Wert der Funktion f.
Der Graph einer Funktion f besitzt genau dann ein absolutes Minimum y_{min}, wenn es keine Funktionswerte gibt, die kleiner sind als dieses. D.h. das absolute Minimum y_{min} ist der absolut kleinste y-Wert der Funktion f.

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2-x-1$ und der Definitionsmenge $D=[-4;4]$. Bestimmen Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum. Geben Sie die Wertemenge W der Funktion f an.

Zunächst bestimmt man (falls vorhanden) die Art und Lage sämtlicher lokaler Extrema (inclusive Randextrema).
$f'(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1$
Man löst die Gleichung $f'(x)=0$

$$\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1)}}{2\cdot\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{2}{3}\pm\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

Zerlegung von f': $f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x+3)$

VZT	-4		-3		1		4
$\frac{1}{3}$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
G_f	RTP	$\nearrow$	$\rightarrow$ HP	$\searrow$	$\rightarrow$ TP	$\nearrow$	RHP

Nun bestimmt man die y-Koordinaten der lokalen Extrema
$f(-4)=1\frac{2}{9} \Rightarrow RTP\left(-4\,|\,1\frac{2}{9}\right)$

$f(1)=-1\frac{5}{9} \Rightarrow TP\left(1\,|\,-1\frac{5}{9}\right)$ $\hat{=}$ absoluter Tiefpunkt

Von den beiden Tiefpunkten (RTP und TP) ist $TP\left(1\,|\,-1\frac{5}{9}\right)$ der Tiefpunkt mit dem absolut kleinsten y-Wert und somit der absolute Tiefpunkt. Für das absolute Minimum, also den kleinsten y-Wert gilt: $y_{min}=-1\frac{5}{9}$

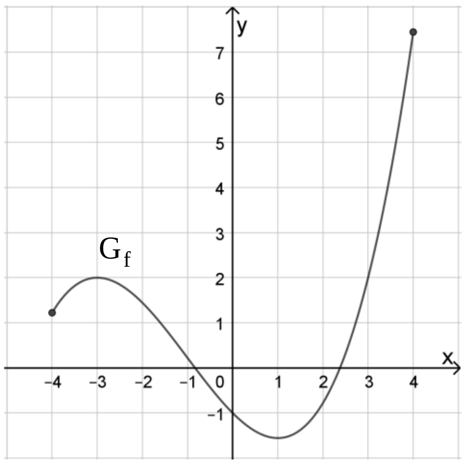
$f(-3)=2 \Rightarrow HP(-3\,|\,2)$

$f(4)=7\frac{4}{9} \Rightarrow RHP\left(3\,|\,7\frac{4}{9}\right)$ $\hat{=}$ absoluter Hochpunkt

Von den beiden Hochpunkten (RHP und HP) ist $\text{RHP}\left(3\,|\,7\tfrac{4}{9}\right)$ der Hochpunkt mit dem absolut größten y-Wert und somit der absolute Hochpunkt. Für das absolute Maximum, also den größten y-Wert gilt: $y_{max} = 7\tfrac{4}{9}$

Für die Wertemenge W der Funktion f folgt nun: $W = \left[-1\tfrac{5}{9}; 7\tfrac{4}{9}\right]$

Und hier noch der Graph der Funktion f:



Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2$ und der Definitionsmenge $D = [-2; \infty[$. Entscheiden Sie, ob der Graph der Funktion ein absolutes Maximum bzw. ein absolutes Minimum besitzt. Geben Sie die Wertemenge W der Funktion f an.

Zunächst bestimmt man (falls vorhanden) die Art und Lage sämtlicher lokaler Extrema (inclusive Randextrema).

$f'(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x$

Man löst die Gleichung $f'(x) = 0$

$$-\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$$

$$-\frac{3}{16}x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Zerlegung von f': $f'(x) = -\frac{3}{16}x(x-4)$

VZT	-2		0		4		x
$-\frac{3}{16}$		$-$		$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
G_f	RHP	↘	→ TP	↗	→ HP	↘	

Nun bestimmt man die y-Koordinaten der lokalen Extrema

$f(-2)=2 \quad \Rightarrow \quad RHP(-2\,|\,2)$

$f(4)=2 \quad \Rightarrow \quad HP(4\,|\,2)$

Da beide Hochpunkte (RHP und HP) denselben y-Wert besitzen gibt es keinen eindeutigen absoluten Hochpunkt. Aber für das absolute Maximum (den größten y-Wert) gilt: $y_{max}=2$

$f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad TP(0\,|\,0)$

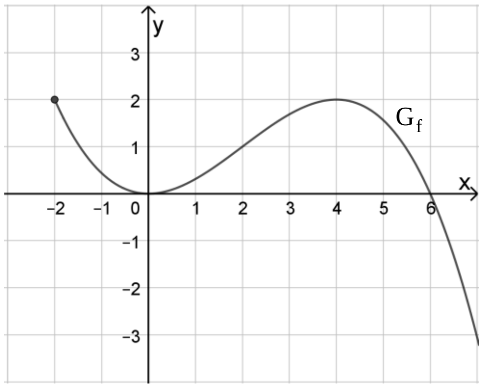
Da es keinen Randtiefpunkt gibt, müssen wir das Verhalten der Funktionswerte am rechten Rand der Definitionsmenge untersuchen:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ (Ganzrationale Funktion dritten Grades mit negativem Formfaktor!)

Da der Graph der Funktion f nach unten (also ins Minus Unendliche) verläuft gibt es kein absolutes Minimum, somit existiert auch kein absoluter Tiefpunkt.

Für die Wertemenge W der Funktion f folgt nun: $W=\left]-\infty;2\right]$

Und hier noch der Graph der Funktion f:



Beispiel 3: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{3}{8}x^4-x^3$ und der Definitionsmenge $D=\mathbb{R}$. Bestimmen Sie das absolute Minimum der Funktion f und begründen Sie, dass es kein absolutes Maximum gibt. Geben Sie die Wertemenge W der Funktion f an.

Zunächst bestimmt man (falls vorhanden) die Art und Lage sämtlicher lokaler Extrema.

$f'(x)=\frac{3}{2}x^3-3x^2$

Man löst die Gleichung $f'(x)=0$

$$\frac{3}{2}x^3-3x^2=0$$

$$\frac{3}{2}x^2(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$$

Zerlegung von f': $f'(x)=\frac{3}{2}x^2(x-2)$

VZT		0		2		x
$\frac{3}{2}$	+		+		+	
x^2	+		+	0	+	
$x-2$	−	0	−		+	
$f'(x)$	−	0	−	0	+	
G_f	↘	→ TeP	↘	→ TP	↗	

Nun bestimmt man die y-Koordinate des lokalen Tiefpunktes

$f(2) = -2 \quad \Rightarrow \quad TP(2|-2)$

Somit ist der lokale Tiefpunkt auch der absoluten Tiefpunkt. Für das absolute Minimum (den kleinsten y-Wert) gilt: $y_{min} = -2$

Nun müssen wir noch das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge untersuchen:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

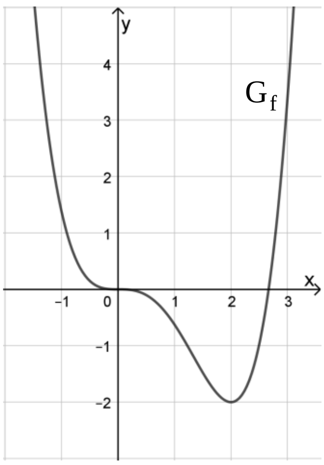
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

(Ganzrationale Funktion vierten Grades mit positivem Formfaktor!)

Da der Graph der Funktion f für sehr kleine und sehr große x-Wert nach oben ins Unendliche verläuft gibt es kein absolutes Maximum.

Für die Wertemenge W der Funktion f folgt nun: $W = [-2; \infty[$

Und hier noch der Graph der Funktion f:



Bemerkung: Besteht die Definitionsmenge aus mehreren Teilintervallen, so muss für jedes Teilintervall die Wertemenge ermittelt werden. Die gesamte Wertemenge erhält man durch Vereinigung der Teilwertemengen.

Das wird aber meist erst dann angewendet, wenn Funktionsterme Definitionslücken besitzen!! (Gebrochenrationale Funktionen, Logarithmusfunktionen, Wurzelfunktionen, …)

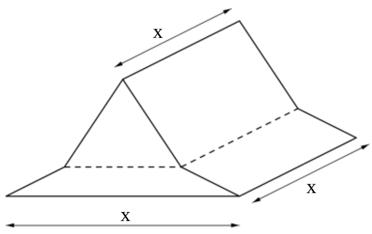
Aufgaben

1. Gegeben ist jeweils Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ und der Definitionsmenge D. Geben Sie die Wertemenge W der Funktion f an.
   a) $f(x)=2x-3$; $D=\mathbb{R}$
   b) $f(x)=-\frac{1}{3}x+1$; $D=[0;\infty[$
   c) $f(x)=\frac{1}{4}x+2$; $D=[-8;0]$
   d) $f(x)=\frac{3}{7}(x-2)^2-2$; $D=\mathbb{R}$
   e) $f(x)=-\frac{3}{8}(x+1)^2+3$; $D=[-1;\infty[$
   f) $f(x)=3(x-2)^2-1$; $D=[0;\infty[$
   g) $f(x)=\frac{2}{5}x^3+x^2-\frac{3}{7}x+2$; $D=\mathbb{R}$
   h) $f(x)=-\frac{5}{9}x(x+2)(x+4)$; $D=[0;\infty[$
   i) $f(x)=\frac{1}{16}x^4+1$; $D=\mathbb{R}$
   j) $f(x)=2-\frac{1}{5}x^4$; $D=[-2;\infty[$
   k) $f(x)=1-\frac{1}{25}x^5+1$; $D=[0;\infty[$
   l) $f(x)=-\frac{3}{11}x^2(x-11)^2$; $D=\mathbb{R}$

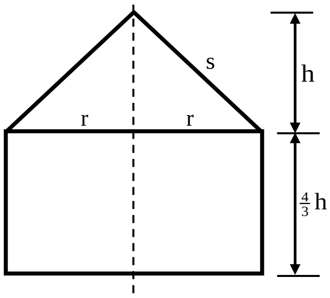
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=-\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$ und der Definitionsmenge D. Bestimmen Sie jeweils die Wertemenge W der Funktion f.
   a) $D=[-6;9]$
   b) $D=[0;6]$
   c) $D=[-2;\infty[$

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{9}x^3-2x^2$ und der Definitionsmenge D. Bestimmen Sie jeweils die Wertemenge W der Funktion f.
   a) $D=[-8;6]$
   b) $D=[-4;\infty[$
   c) $D=[2;6]$

4. **AP 2011 AI**
   Eine Schokoladenfirma will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und die Breite der Praline beträgt jeweils x cm. Für das Volumen V der Praline in Abhängigkeit von x gilt: $V(x)=-0{,}75x^3+3x^2$ mit $D_V=[0;4]$. Berechnen Sie x so, dass das Volumen der Praline den absolut größten Wert annimmt.

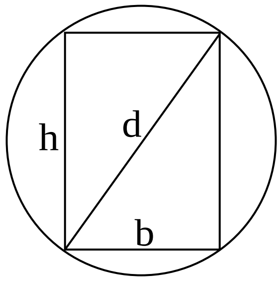


5. **AP 2010 AII**



Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts).
Für die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h (in m) gilt:
$V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi$
mit der Definitionsmenge $D_V = [0;15]$.
Berechnen Sie h so (gerundet auf ganze Zentimeter) , dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Bestimmen Sie auf damit den Wert V_{max} des maximalen Volumens.

6. **AP 2018 AII**



Aus einem zylindrischen Baumstamm mit dem Durchmesser $d = 24\,\text{cm}$ soll ein Balken mit maximalem Biegewiederstand herausgeschnitten werden. Die Abbildung zeigt den Querschnitt des Baumstammes und des rechteckigen Balkens. Für einen rechteckigen Balken-Querschnitt mit der Balkenbreite b (in cm) und der Balkenhöhe h gilt für das Biegewiderstandsmoment W die Funktionsgleichung $W(b) = \frac{1}{6}\left(576b - b^3\right)$. Aus produktionstechnischen Gründen gilt für die Funktion W die Definitionsmenge $D_W = [8;22]$.
Berechnen Sie die Breite b des Balkens für den Fall, dass die Maßzahl W für das Biegewiderstandsmoment des Balkens den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie in diesem Fall auch die Höhe h des Balkens und runden Sie Ihre Ergebnisse auf ganze Millimeter.