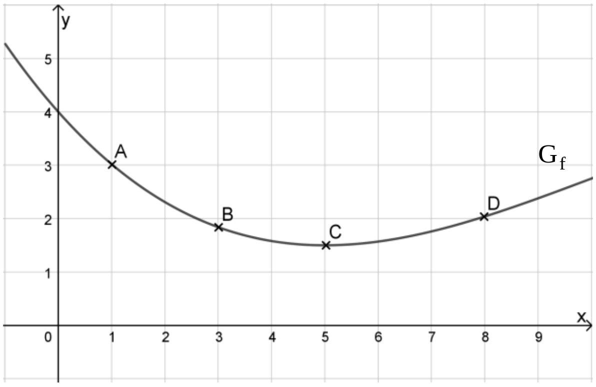
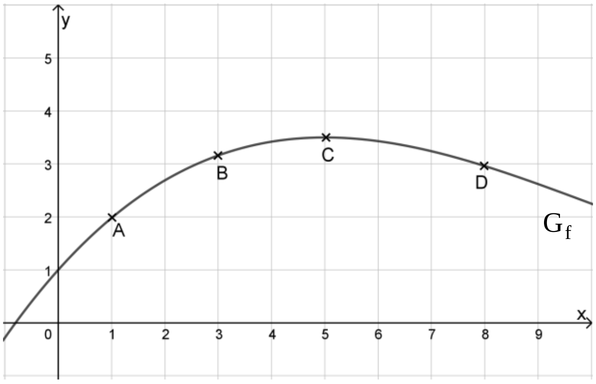
Katzen krümmen den Rücken nur,
um sich zu verteidigen.
(Jean Paul, deutscher Dichter, Publizist und Pädagoge)

§ 12 Krümmung und Wendepunkt

12.1 Die zweite Ableitung einer Funktion

Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Der Graph der Funktion f ist im linken Bild linksgekrümmt und im rechten Bild rechtsgekrümmt.
Zeichnen Sie zunächst die Tangenten an den Graph der Funktion f in den eingezeichneten Punkten A, B, C und D ein und entnehmen Sie der Zeichnung die jeweiligen Tangentensteigungen.





Betrachtet man die Steigungswerte der eingezeichneten Tangenten, so stellt man fest, dass diese mit zunehmenden x-Wert größer werden. Die Steigungswerte sind also streng monoton zunehmend. D.h., dass für die 1. Ableitung der Steigungsfunktion gelten muss:

$$\left(f'(x)\right)' > 0$$

Das ist aber die 2. Ableitung der Funktion f, also muss gelten: $f''(x) > 0$

Betrachtet man die Steigungswerte der eingezeichneten Tangenten, so stellt man fest, dass diese mit zunehmenden x-Wert kleiner werden. Die Steigungswerte sind also streng monoton abnehmend. D.h., dass für die 1. Ableitung der Steigungsfunktion gelten muss:

$$\left(f'(x)\right)' < 0$$

Das ist aber die 2. Ableitung der Funktion f, also muss gelten: $f''(x) < 0$

<u>Satz</u>: Sei f eine im Intervall $]a;b[$ differenzierbare Funktion, dann gilt für alle $x \in]a;b[$:

$$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; G_f \text{ ist in }]a;b[\text{ linksgekrümmt}$$
$$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; G_f \text{ in }]a;b[\text{ rechtsgekrümmt}$$

Ziel ist es nun die maximalen Krümmungsintervalle einer Funktion, genauer gesagt eigentlich deren Ränder zu ermitteln. Dies findet man durch lösen der Gleichung $f''(x) = 0$.

Eine Vorzeichenuntersuchung von f'' liefert dann die Krümmungsintervalle des Graphen der Funktion f und damit auch gleich einen möglichen Wendepunkt des Graphen.

Übung: Gegeben ist die Funktion f mit $f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+2x-1$, $D_f=\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts.

Man bildet zunächst die 1. und die 2. Ableitung der Funktion f.

$f^{/}\left(x\right)=2x^2-6x+2$

$f^{//}\left(x\right)=4x-6$

Nun löst man die Gleichung $f^{//}\left(x\right)=0$

$$4x-6=0$$
$$x_1=1{,}5$$

Zerlegung von $f^{//}$: $f^{//}\left(x\right)=4\cdot\left(x-1{,}5\right)$

Vorzeichenuntersuchung:

VZT		1,5		x
4	+		+	
$x-1{,}5$	−	0	+	
$f^{//}\left(x\right)$	−	0	+	
G_f		WP		

Somit folgt:

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left]-\infty;1{,}5\right]$.

G_f ist linksgekrümmt in $\left[1{,}5;\infty\right[$.

G_f hat an der Stelle $x_1=1{,}5$ einen Wendepunkt. Mit $f\left(1{,}5\right)=-2{,}5\ \Rightarrow\ WP\left(1{,}5\,|\,-2{,}5\right)$

Bemerkung: Einen Wendepunkt hat man genau dann, wenn ein Krümmungswechsel (Vorzeichenwechsel) vorhanden ist.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Bereiche, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist und ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts.

   a) $f: x\mapsto \frac{1}{6}x^3-x^2+2x-7$

   b) $f: x\mapsto -2x^3+\frac{1}{2}x^2-1$

   c) $f: x\mapsto \frac{1}{12}x^4-2x^2+3x-1$

   d) $f: x\mapsto \frac{1}{2}x^4-x^3-6x^2+x+3$

   e) $f: x\mapsto -x^4+7x^3+12x^2-3x+1$

   f) $f: x\mapsto \frac{1}{40}x^5+\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{3}x^3-x^2$

12.2 Krümmung an einer Stelle

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ und der Punkt $P(1 | y_P)$.
Wir wissen, dass man die y-Koordinate des Punktes P durch bilden des Funktionswerts an der Stelle $x = 1$ erhält. Also
$f(1) = -\frac{5}{24} \approx -0,21 \;\Rightarrow\; P(1 | -0,21)$
Die Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 1$ erhält man mit Hilfe der 1. Ableitung der Funktion f. Also
$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$
und dann bildet man
$f'(1) = -\frac{1}{2}$ $(\hat{=}\text{ Tangentensteigung})$
Nun bilden wir die 2. Ableitung der Funktion f: $f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$
Aber was bedeutet nun $f''(1) = 1$? Was sagt der Wert 1 aus?

Mit dem Zahlenwert selbst können wir in der Schule nichts anfangen. Nur sei vielleicht soviel gesagt: Je größer der Betrag dieser Zahl, desto gekrümmter verläuft der Graph.

Wir benötigen in der Schule lediglich das Vorzeichen des Zahlenwerts von $f''(1) = 1$. In diesem Fall ist das Vorzeichen positiv, also ist $f''(1) > 0$ und somit der Graph der Funktion f an der Stelle $x = 1$ linksgekrümmt.

Merke: Ist ein Funktion f zweimal differenzierbar, so gilt:

$$f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; G_f \text{ ist an der Stelle } x_0 \text{ rechtsgekrümmt}$$
$$f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; G_f \text{ ist an der Stelle } x_0 \text{ linksgekrümmt}$$

Übung: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$. Entscheiden Sie, welches Krümmungsverhalten der Graph der Funktion f an der Stelle $x = -1$ besitzt.

Dazu bilden wir zunächst die 2. Ableitung der Funktion f.
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$
$f''(x) = x - 1$
Nun berechnen wir $f''(-1) = -1 - 1 = -2 < 0$
Somit ist der Graph der Funktion f an der Stelle $x = -1$ rechtsgekrümmt.

Das verwendet man eigentlich hauptsächlich zum Nachweis der Art eines relativen Extremum.

Folgerung: Gegeben ist eine Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$. Wenn für ein $x_0 \in D_f$ gilt:

- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat der Graph der Funktion f an der Stelle x_0 einen relativen Hochpunkt.
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat der Graph der Funktion f an der Stelle x_0 einen relativen Tiefpunkt.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2$. Bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrema des Graphen der Funktion f mit Hilfe der zweiten Ableitung von f.

1. Ableitung von f: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Nun löst man die Gleichung $f'(x) = 0$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$$
$$\frac{1}{2}x(x-4) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad (1x) \qquad x_2 = 4 \quad (1x)$$

2. Ableitung von f: $f''(x) = x - 2$

nun setzt man x_1 bzw. x_2 in f'' und f ein.

$$\left.\begin{array}{l} f''(0) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \text{Rechtskrümmung} \;\Rightarrow\; \text{HP} \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{HP}(0\,|\,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(4) = 2 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Linkskrümmung} \;\Rightarrow\; \text{TP} \\ f(4) = -5\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{TP}\left(4\,|\,-5\frac{1}{3}\right)$$

Aufgaben

2. Bestimmen Sie mit Hilfe der 2. Ableitung die Art und Lage der relativen Extrema der Funktion f.
   a) $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + x^2$
   b) $f : x \mapsto \frac{1}{4}\left(-x^3 + 12x + 16\right)$
   c) $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$

12.3 Alternativkriterium zum Nachweis eines Wendepunktes

Eine Funktion f besitzt an einer Stelle x_W genau dann einen Wendepunkt wenn $f''(x_W)=0$ und diese Nullstelle der zweiten Ableitung einen Vorzeichenwechsel hat. Der Nachweis erfolgte mit Hilfe einer Vorzeichentabelle. Es gibt aber noch zwei weitere Möglichkeiten, um diesen Nachweis zu erbringen.

Möglichkeit 1: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-1$ und $D_f=\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen der Funktion f.

$f'(x)=x^2-4x+1$

$f''(x)=2x-4$

Zu lösen ist nun $f''(x)=0$

$$2x-4=0$$
$$x=2 \quad (1x)$$

Da diese Nullstelle (der zweiten Ableitung) einfach ist, muss hier ein Vorzeichenwechsel stattfinden. Somit hat G_f an der Stelle $x_W=2$ einen Wendepunkt.

$f(2)=-4\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad WP\left(2\,|\,-4\frac{1}{3}\right)$

Merke: Hat die zweite Ableitung der Funktion f eine einfache (dreifache, fünffache, …) Nullstelle, so liegt ein Vorzeichenwechsel vor und somit hat der Graph der Funktion f an dieser Stelle einen Wendepunkt.

Bemerkung: Die Vielfachheit einer Nullstelle lässt sich „nur" bei ganzrationalen Funktionen folgern.

Übung: Bestimmen Sie (nach obigem Schema) die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+2x-1$.

Möglichkeit 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+1$ und $D_f=\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen der Funktion f.

$f'(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$

$f''(x)=4x^2-4$

Zu lösen ist nun $f''(x)=0$

$$4x^2-4=0$$
$$4x^2=4$$
$$x^2=1$$
$$x_{1/2}=\pm 1$$

Um nun den „Nachweis" eines Vorzeichenwechsels zu erbringen gehen wir wie folgt vor! Wir bilden zunächst die 3. Ableitung der Funktion f.

$f'''(x) = 8x$

Und setzen die Nullstellen der 2. Ableitung in f''' ein.

$$\left.\begin{array}{l} f'''(-1) = 8 \cdot (-1) = -8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{VZW} \\ f(-1) = -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad WP_1\left(-1 \mid -\frac{2}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'''(1) = 8 \cdot 1 = 8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{VZW} \\ f(1) = -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad WP_2\left(1 \mid -\frac{2}{3}\right)$$

Merke: Der Graph der Funktion f hat genau dann an der Stelle x_W einen Wendepunkt, wenn gilt: $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$

Bemerkung: Würde $f'''(x_W) = 0$ sein, so lässt sich nicht zwingend folgern, dass es keinen Wendepunkt gibt.

Übung: Bestimmen Sie (nach obigem Schema) die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - 1$.

Aufgaben

3. Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f.
   a) $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2$
   b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-4)^2$
   c) $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + x$

12.3 Terrassenpunkt

Merke: Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x-\frac{1}{3}$, $D_f=\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f einen Terrassenpunkt besitzt und ermitteln Sie dessen Lage.

Man zeigt also zunächst, dass der Graph der Funktion f einen Wendepunkt besitzt.

$f'(x)=x^2+4x+4$

$f''(x)=2x+4$

$$\begin{aligned} f''(x)&=0\\ 2x+4&=0\\ 2x&=-4\\ x&=-2 \end{aligned}$$

Da $x=-2$ eine einfache Nullstelle von f'' ist, liegt hier ein Vorzeichenwechsel vor und somit hat der Graph der Funktion f an der Stelle $x_W=-2$ einen Wendepunkt.

$$\left.\begin{aligned} &f'(-2)=0 \;\Rightarrow\; \text{TeP}\\ &f(-2)=-3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{TeP}(-2\,|\,-3)$$

Somit hat der Graph der Funktion f einen Terrassenpunkt.

Übung: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$, $D_f=\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f zwei Wendepunkte besitzt und entscheiden Sie, welcher der beiden ein Terrassenpunkt ist. Ermitteln Sie auch deren Lage.

12.5 Wendetangente

Die Tangente an einen Funktionsgraphen in seinem Wendepunkt nennt man Wendetangente.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{4}x^2$, $D_f=\mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente des Graphen der Funktion f.

Man auch hier zunächst zeigen, dass der Graph der Funktion f einen Wendepunkt besitzt.

$f'(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$

$f''(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f''(x)&=0\\ -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}&=0\\ -\tfrac{1}{2}x&=-\tfrac{1}{2}\\ x&=1 \end{aligned}$$

Da $x=1$ eine einfache Nullstelle von f'' ist, liegt hier ein Vorzeichenwechsel vor und somit hat der Graph der Funktion f an der Stelle $x_W=1$ einen Wendepunkt.

Mit $f(1)=\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad WP(1|\frac{1}{6})$

Um nun die Tangentengleichung im Wendepunkt zu bestimmen benötigt man noch die Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_W=1$.

$f'(1)=-\frac{1}{4}=m_W$

Nun setzt man $m_W=-\frac{1}{4}$ und $WP(1|\frac{1}{6})$ in $y=mx+t$ ein und erhält:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{6}&=-\tfrac{1}{4}\cdot 1+t\\ t&=\tfrac{5}{12} \end{aligned}$$

Somit folgt für die Gleichung der Wendetangente: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{12}$

Bemerkung: Bei diesen Aufgaben ist nach wie vor wichtig den Nachweis für den Wendpunkt zu führen. Das wird leider häufig vergessen.

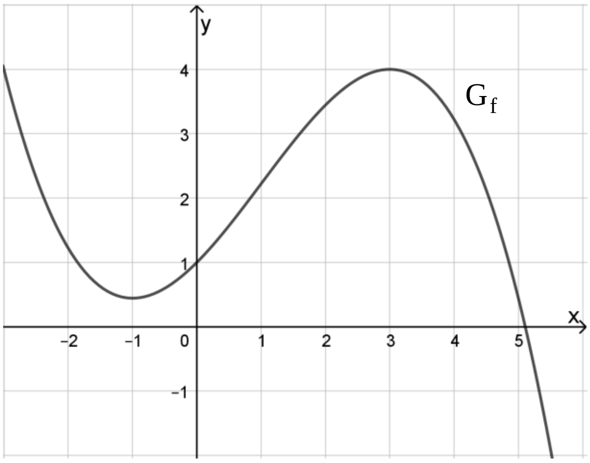
Übung: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{3}x^3+5\frac{2}{3}$, $D_f=\mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Gleichungen der Wendetangenten des Graphen der Funktion f.

Aufgaben:

4. Ermitteln Sie die Gleichung(en) der Wendetangente des Graphen der Funktion f.
   a) $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}$
   b) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^2$

12.6 Stellen maximaler/minimaler Steigung

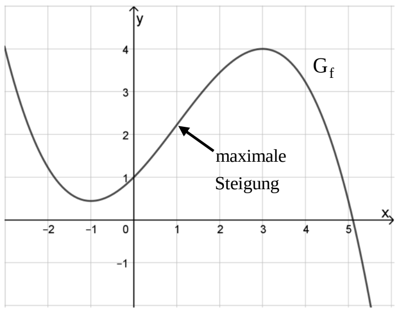
Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x + 1$ und der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f ist rechts abgebildet.
Bei Anwendungsaufgaben (die später noch behandelt werden) wird oft nach den Stellen des Graphen einer Funktion gefragt in welcher der Graph eine maximale (oder minimale) Steigung besitzt.



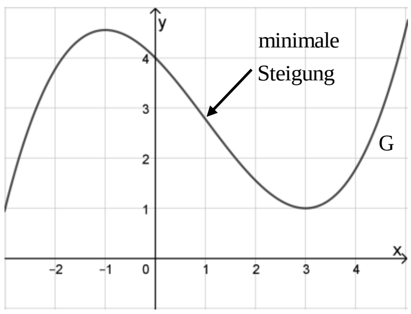
Betrachtet man nun den Verlauf des Graphen, so stellt man fest:
In den Intervallen $]-\infty;-1]$ und $[3;\infty[$ ist der Graph der Funktion f streng monoton fallend und im Intervall $[-1;3]$ ist der Graph streng monoton steigend. Somit kann der Graph der Funktion f seine steilste Stelle nur im Intervall $[-1;3]$ haben. Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass die steilste Stelle in etwa an der Stelle $x = 1$ vorliegt. Aber das ist ja auch die Wendestelle!

Merke: Die Wendestellen sind die Stellen, in denen der Funktionsgraph seine (lokal) maximale bzw. minimale Steigung annimmt.

Der Graph besitzt im Wendepunkt genau dann eine maximale Steigung, wenn der Funktionsgraph von einer Links- in eine Rechtskrümmung übergeht (siehe auch Abbildung oben).



Der Graph besitzt im Wendepunkt genau dann eine minimale Steigung, wenn der Funktionsgraph von einer Rechts- in eine Linkskrümmung übergeht.
Anstatt von minimaler Steigung spricht man auch von einem maximalen Gefälle, wenn die Steigung negativ ist.



Nun ermitteln wir noch die Stelle des Graphen der Funktion f mit maximaler Steigung.

$f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x + 1$

$f'(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

$f''(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

Nun löst man die Gleichung $f''(x) = 0$

$$-\tfrac{2}{3}x+\tfrac{2}{3}=0 \qquad |-\tfrac{2}{3}$$
$$-\tfrac{2}{3}x=-\tfrac{2}{3} \qquad |:\left(-\tfrac{2}{3}\right)$$
$$x=1$$

Um nun zu ermitteln, welcher Krümmungswechsel vorliegt macht man eine Vorzeichentabelle.

Zerlegung: $f''(x)=-\tfrac{2}{3}(x-1)$

VZT		1	x
$-\tfrac{2}{3}$	$-$		$-$
$x-1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
G_f		WP	

An der Stelle $x=1$ geht der Graph der Funktion f von einer Links- in eine Rechtskrümmung über, somit hat der Graph der Funktion f an der Stelle $x=1$ maximale Steigung.
Den Wert der maximalen Steigung erhält man mit der 1. Ableitung.

$$f'(1)=-\tfrac{1}{3}\cdot 1^2+\tfrac{2}{3}\cdot 1+1=\tfrac{4}{3}$$

Somit hat der Graph der Funktion f seine maximale Steigung $m=\tfrac{3}{4}$ an der Stelle $x=1$.

Übung: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=-\tfrac{2}{9}x^3-\tfrac{2}{3}x^2+2x$ und der Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Stelle in welcher der Graph der Funktion f seine maximale Steigung besitzt und berechnen Sie diese.

Aufgaben

5. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=-\tfrac{1}{20}x^5+\tfrac{1}{2}x^2$ und der Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Stelle in welcher der Graph der Funktion f seine maximale Steigung besitzt und berechnen Sie diese.
6. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{1}{2}x^2-x$ und der Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Stelle in welcher der Graph der Funktion f maximales Gefälle besitzt und berechnen Sie diese.
7. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\tfrac{1}{12}x^4-2x^2+x$ und der Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Stelle in welcher der Graph der Funktion f (lokal) maximale bzw. minimale Steigung besitzt und berechnen Sie diese. Begründen Sie, ob diese Steigungswerte auch absolut maximal bzw. minimal sind.

Bemerkungen:

- Der Wendepunkt liefert nur Stellen mit lokal maximaler bzw. minimaler Steigung. Absolut gesehen kann es durchaus größere bzw. kleinere Steigungswerte geben.
- Anstelle minimaler Steigung spricht man auch von maximalen Gefälle.

Folgerung: Die Wendestellen sind die Extremstellen der 1. Ableitung.

Aufgaben

8. Bestimmen Sie in welchen Punkten der Graph der Funktion f eine waagrechte Tangente besitzt und entscheiden Sie, ob es sich um einen rel. Hochpunkt, rel. Tiefpunkt oder um einen Terrassenpunkt handelt.

   a) $f: x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + x^2$

   b) $f: x \mapsto \frac{1}{4}\left(-x^3 + 12x + 16\right)$

   c) $f: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

9. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f, die Art und Lage der rel. Extrempunkte sowie die Koordinaten des/der Wendepunkte des Funktionsgraphen.

   a) $f: x \mapsto x^4 - 24x^2 + 44$

   b) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 35x - 1$

   c) $f: x \mapsto x^4 - 4x^3 + 4x^2$

   d) $f: x \mapsto x^3 + 3x^2$

   e) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

   f) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

   g) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9 = \frac{1}{3}(x-3)^2(x+3)$

   h) $f: x \mapsto \frac{1}{4}\left(x^3 + 2x^2 - 4x - 8\right)$

   i) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - 3x + 4$

10. Zeige, dass folgende Funktionsgraphen drei Wendepunkte besitzen, die alle auf einer Geraden durch den Ursprung liegen.

    a) $f: x \mapsto 0{,}3x^5 - x^3 + x$

    b) $f: x \mapsto 0{,}15x^5 - 2x^3 + 5x$

11. Bestimme die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen folgender Funktionen und gib die Gleichung der Wendetangente an. Entscheiden Sie auch ob es Terrassenpunkte gibt.

    a) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 1$

    b) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + 27x^2 - 2x + 1$

    c) $f: x \mapsto -2x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 3x$

    d) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 1$

12. Zeigen Sie, dass jeder Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades genau einen Wendepunkt besitzt.

13.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{10}(x+4)(x-2)^2$

13.1 Geben Sie Nullstellen der Funktion f an und deuten Sie deren Vielfachheit geometrisch.

13.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle und folgern Sie daraus die Lage der Extrema.

13.3 Bestimmen Sie die Krümmungsintervalle und entscheiden Sie, ob der Graph der Funktion f einen Wendepunkt besitzt.

13.4 Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente des Graphen der Funktion f .

14.0 Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x^3 - 3x^2 + 4\right)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

14.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und zerlegen Sie den Funktionsterm in Linearfaktoren.

14.2 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f weder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

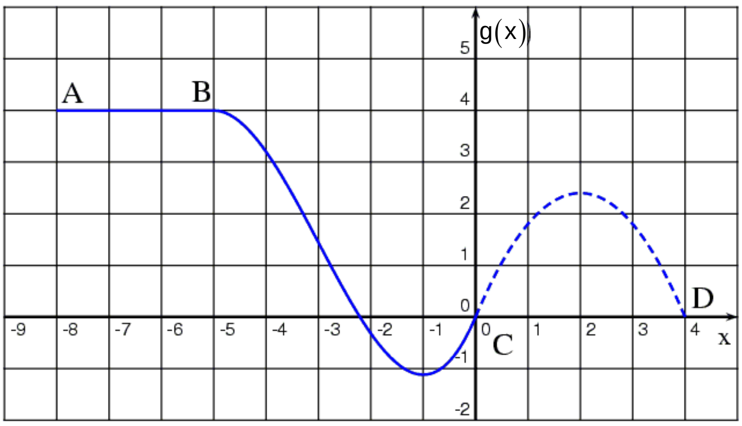
14.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie die Art und Lage der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

14.4 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und den Wendepunkt des Funktionsgraphen.

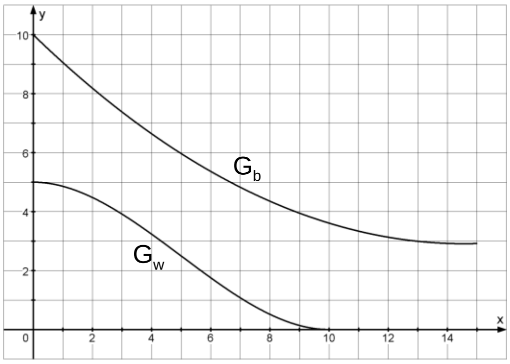
14.5 Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente von f.

14.6 Fertigen Sie eine Wertetabelle an für $x \in [-1; 4]$ in einer Schrittweite von $\Delta x = 1$ und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

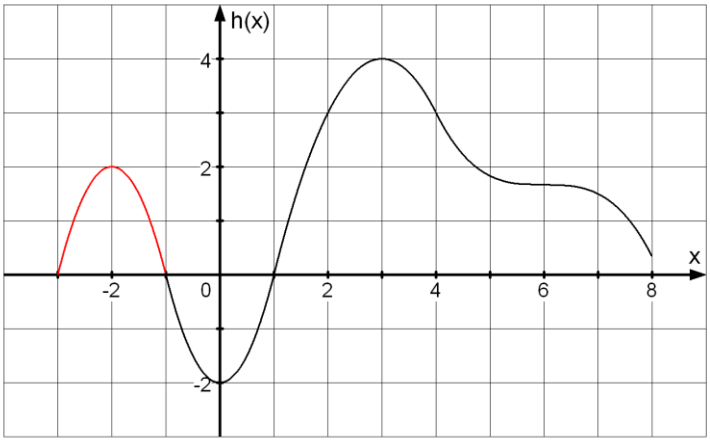
15. **AP NT 2007 AI** (Aufgabe 3 angepasst)
Für einen Snowboard-Sprungwettbewerb wird eine Rampe präpariert. Die Teilnehmer starten von einer waagrechten Plattform (AB), gleiten ab $B(-5|4)$ durch die Rampe (BC) und beginnen den Sprung im Punkt $C(0|0)$. Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes im abfallenden Teil der Rampe, in dem diese am steilsten ist



16. **AP NT 2005 AII**
Nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt einer überdachten Wasserrutsche. Der Graph G_w stellt die Wasserrutsche, der Graph G_b stellt die Bedachung dar, die über die Rutsche hinaus verlängert ist.
Die Funktionen w ist gegeben durch
$w: x \mapsto \frac{1}{100}\left(x^3 - 15x^2 + 500\right)$ mit $D_w = [0; 10]$.
Berechnen Sie an welcher Stelle die Wasserrutsche das stärkste Gefälle aufweist.



17. **AP NT 2006 AII**
2.0 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto h(x)$; $\mathbb{D}_h = [-3; 8]$. Ihr Graph G_h hat folgendes Aussehen:



2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion h an.

2.2 An der Stelle $x_1 = 6$ gilt $h'(6) = h''(6) = 0$, $h'''(6) \neq 0$; an der Stelle $x_2 = 4$ gilt $h''(4) = 0$, $h'''(4) \neq 0$. Geben Sie an, welcher Art die Punkte $P(6 \mid h(6))$ und $Q(4 \mid h(4))$ demnach sind.

2.3 Erläutern Sie kurz, was es jeweils für den Graphen G_h bedeutet, wenn in einem bestimmten Intervall eine der Bedingungen
(A): $h(x) > 0$ (B): $h'(x) < 0$ (C): $h''(x) > 0$
gilt.

2.4 Geben Sie mit Hilfe der Zeichnung jeweils diejenigen Intervalle an, in denen
a) die Bedingungen (A) und (B) aus 2.3 zugleich,
b) alle 3 Bedingungen aus 2.3 zugleich gelten.

18. **AP NT2002 A II**

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto f_a(x)$; $D_{f_a} = \mathbb{R}$

$f_a(x) = \frac{1}{8}(a-x)\cdot(x^2+4x+4)$ mit $a \in \mathbb{R}$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie das Intervall, in dem $f_a(x) \geq 0$ ist.

1.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Extremstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

(Mögliches Teilergebnis: $f_a^{/}(x) = -\frac{1}{8}\cdot(3x^2+(8-2a)\cdot x-4a+4)$.)

1.3 Berechnen Sie den Wert von a so, dass der Graph G_{f_a} im Schnittpunkt mit der y-Achse die Steigung $m = 1{,}5$ besitzt.

2.0 Für die folgenden Teilaufgaben wird $a = 4$ gesetzt. Der zur Funktion f_4 gehörende Funktionsterm lässt sich in der Form $f_4(x) = -\frac{1}{8}\cdot(x-4)\cdot(x+2)^2$ schreiben.

(Beweis nicht erforderlich!)

2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_4 mit jeweiliger Vielfachheit an.

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_{f_4}.

2.3 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_4} im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ unter Berücksichtigung vorhandener Ergebnisse und unter Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte. Verwenden Sie ein gesondertes DIN-A4-Blatt im Hochformat und legen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in die Blattmitte.

19. **AP NT 2004 AII**

1.0 Gegeben sind die Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ in der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie, dass die x-Koordinate des Wendepunkts des Graphen G_{f_a} von a unabhängig ist.

1.2 Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm $f_a(x)$ auch in der Form $f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a)$ schreiben lässt und bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

(Hinweis: Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch.)

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $a = 1$ und $f_1(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 3$.

1.3 Berechnen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen G_{f_1}.

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_{f_1} für $-3 \leq x \leq 6$ in ein Koordinatensystem.

1.5 Berechnen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_{f_1} und $G_{f_1^{/}}$ (Ableitung). Runden Sie gegebenenfalls auf 2 Nachkommastellen.

(Teilergebnis: Die ganzzahlige Lösung ist $x = 3$.)

1.6 Der Graph $G_{f_1'}$ der Funktion f_1' ist eine Parabel. Berechnen Sie die Koordinaten ihres Scheitels. Zeichnen Sie den Graphen $G_{f_1'}$ für $-3 \le x \le 6$ in das vorhandene Koordinatensystem.

1.7 Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Wendetangente von G_{f_1} und der y-Koordinate des Scheitels von $G_{f_1'}$ in Worten.

20. **AP NT 2006 AI**

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2 + 2$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $D_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

2.1 Berechnen Sie diejenigen Stellen, an denen der Graph G_{f_a} eine horizontale Tangente besitzt. Bestimmen Sie dann a so, dass der zugehörige Graph einen Terrassenpunkt aufweist.

Für die beiden folgenden Teilaufgaben gilt: $a > 2$

2.2 Ermitteln Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen G_{f_a}.

2.3 Bestimmen Sie a so, dass der Tiefpunkt $T\left(a \mid -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 + 2\right)$ des Graphen auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2$ liegt.

Für die beiden folgenden Teilaufgaben ist $a = 3$ mit $f_3(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 2$ bzw. $a = 4$ mit $f_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2$.

2.4 Bestimmen Sie die x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen G_{f_3} und G_{f_4}.

21. **AP NT 2007 AII**

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k : x \mapsto \frac{1}{8}\cdot\left(x^2 - k\right)\left(x^2 - 4\right) \qquad k \in \mathbb{R} \text{ und } D_{f_k} = \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Begründen Sie folgende Aussage: Für jeden Parameter k mit $k < 0$ schneidet der Graph G_{f_k} die x-Achse zweimal, berührt sie jedoch nicht.

1.2 Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie.

1.3 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$ die x-Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph G_{f_k} waagrechte Tangenten aufweist.

1.4 Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den der Graph G_{f_k} die x-Achse an der Stelle $x_1 = 2$ berührt.

2.0 Jetzt wird $k = 4$ gesetzt. Man erhält die Funktion f_4 mit $f_4(x) = \frac{1}{8}\left(x^2 - 4\right)^2$.

2.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f_4 und geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an.

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen von f_4 sowie die Koordinaten der Wendepunkte.

2.3 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f_4 für $-3 \le x \le 3$ in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie dafür eine eigene Seite und zeichnen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in die Blattmitte.

22. **AP NT 2008 AI**

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion

$f_k : x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{k}{2}x^2 + 2x - 2k$ mit $k \in IR$ und $D_{f_k} = \mathbb{R}$.

Der Graph wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph G_{f_k} für jedes k zwei relative Extremstellen besitzt.

1.2 Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente des Graphen G_{f_k}.

Bestätigen oder widerlegen Sie anhand Ihres Ergebnisses die Aussage:
"Für $k > 0$ gilt: Je größer der Wert von k, desto steiler die Tangente."
(Ausführliche Rechnung nicht erforderlich!)

1.3 Weisen Sie nach, dass die Tangente an G_{f_k} im Schnittpunkt mit der y-Achse eine von k unabhängige Steigung hat.

1.4 Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ einen relativen Hochpunkt besitzt.

2.0 Nun wird $k = 2$ gesetzt. Man erhält also die Funktion f_2.

2.1 Zeigen Sie, dass der Funktionsterm von f_2 sich auch in der Form

$f_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)(x-2)$ schreiben lässt und bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion und deren Vielfachheiten.

2.2 Berechnen Sie die maximalen Monotonieintervalle. Geben Sie mit deren Hilfe Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte an.

2.3 Zeichnen Sie mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f_2 im Bereich $-2{,}5 \le x \le 3$.