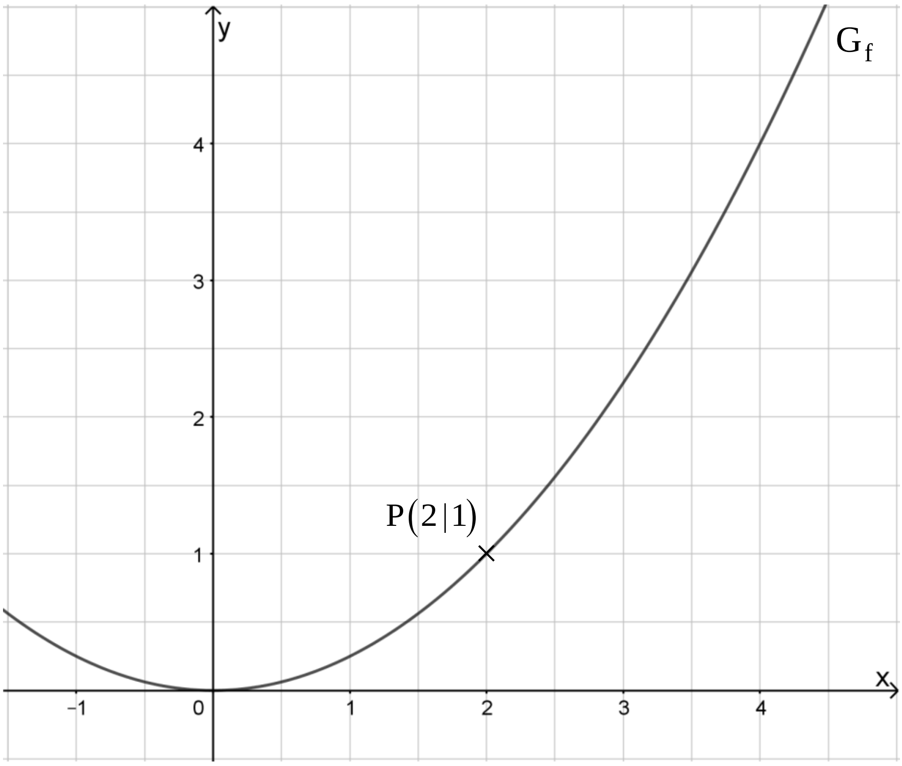
In Europa haben sie die Uhr,
wir haben die Zeit
(afrikanisches Sprichwort)

§ 10 Ableitung

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Steigung des Graphen an einer Stelle lediglich graphisch ermitteln konnten, wollen wir nun die Sache rechnerisch verfolgen.

10.1 Tangentensteigung

Gegeben sei also die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f ist in folgendem Koordinatensystem abgebildet.
Welche Steigung hat nun der Graph der Funktion f im Punkt $P(2|1)$?



Zeichnen Sie zunächst die Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt P ein.

Um die Steigung der Tangente an den Graph der Funktion f zu bestimmen wäre ein zweiter Punkt auf dem Graph eigentlich sehr hilfreich.
Also wählen wir einfach einen Punkt Q, der rechts von P liegt. Also

$$Q(3|f(3)) \;\Rightarrow\; Q(3|2{,}25)$$

Nun berechnen wir (mit Hilfe des Differenzenquotienten) die Steigung der Sekante durch P und Q.

$$m_{PQ} = \frac{2{,}25-1}{3-2} = 1{,}25$$

Vergleicht man diesen Steigungswert mit der Steigung der eingezeichneten Tangente, so stellt man fest, dass dieser Wert zu groß ist. Das liegt aber daran, dass der Punkt Q zu „weit“ von P entfern ist.
Besser wäre aber es also einen Punkt zu wählen, der näher an $P(2|1)$ liegt.
Also wählen wir

$$Q(2,2 \mid f(2,2)) \;\Rightarrow\; Q(2,2 \mid 1,21)$$

Für die (Sekanten-) Steigung durch P und Q folgt nun:

$$m_{PQ} = \frac{1,21-1}{2,2-2} = \frac{0,21}{0,2} = 1,05$$

Das liefert schon einen relativ guten Wert.

Mathematisch zufriedenstellend ist das allerdings nicht, da die beiden Punkte P und Q mathematisch gesehen zu weit auseinander liegen.

Wir bräuchten als einen zweiten Punkt Q, der ganz nahe an P liegt.

Also wählen wir den Punkt Q so, dass er nur einen „Hauch“ h rechts von P liegt. Also

$$Q(2+h \mid f(2+h)) \;\Rightarrow\; Q\left(2+h \mid \tfrac{1}{4}(2+h)^2\right)$$

Dabei ist h eine sehr kleine positive Zahl von der man sich vorgestellt, dass sie immer kleiner wird und schließlich gegen Null geht (also ganz ganz nah an der Null ist!).

Das drückt man mathematisch so aus: $\lim\limits_{h\to 0}$

Nun ermitteln wir wieder die Sekantensteigung durch P und Q.
(Und weil Q ganz nah an P dran ist schreiben wir nicht m_{PQ}, sondern einfach nur m_P)

$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}(2+h)^2 - 1}{2+h-2}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}\left(4+4h+h^2\right) - 1}{h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{1+h+\frac{1}{4}h^2 - 1}{h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}h^2 + h}{h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{h\left(\frac{1}{4}h+1\right)}{h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \left(\tfrac{1}{4}h+1\right)$$
$$m_P = 1$$

Somit hat der Graph der Funktion f im Punkt P die Steigung $m_P = 1$.

Übung: Bestimmen Sie nach obiger Vorgehensweise die Steigung m_P mit den Punkten

$P(2|1)$ und $Q(2-h|f(2-h)) \;\Rightarrow\; Q\left(2-h|\frac{1}{4}(2-h)^2\right)$

$$m_P = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}(2-h)^2-1}{2-h-2}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}\left(4-4h+h^2\right)-1}{-h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0}\frac{1-h+\frac{1}{4}h^2-1}{-h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}h^2-h}{-h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0}\frac{-h\left(-\frac{1}{4}h+1\right)}{-h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{4}h+1\right)$$
$$m_P = 1$$

Man hätte also denselben Wert erhalten, wenn man den zweiten Punkt Q links von P gewählt hätten.

Übung 1: Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $P(1|0,25)$.

Übung 2: Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $P(3|2,25)$.

Übung 3: Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $P(-2|1)$.

10.2 Differentialquotient

Wir wollen nun ganz allgemeine die Steigung des Graphen der Funktion f im Punkt $P(x \mid f(x))$ bestimmen. Dazu verwenden wir als zweiten Punkt den Punkt $Q(x+h \mid f(x+h))$ der sich rechts von P befindet und sich bei kleiner werdendem h dem Punkt P immer mehr annähert.

$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2-\frac{1}{4}x^2}{h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}\left(x^2+2xh+h^2\right)-\frac{1}{4}x^2}{h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}xh+\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{4}x^2}{h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}xh+\frac{1}{4}h^2}{h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{h\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}h\right)}{h}$$
$$m_P = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}h\right)$$
$$m_P = \frac{1}{2}x$$

Der Term $m = \frac{1}{2}x$ gibt somit die Steigung der Tangenten an den Graph der Funktion f an der Stelle x an.

Vergleichen Sie dazu auch Aufgabe 3.2 aus dem letzten Kapitel!

Übung: Bestimmen Sie die Tangentensteigung im Punkt $P(x \mid f(x))$ indem man als zweiten Punkt den Punkt $Q(x-h \mid f(x-h))$ so wählt, dass er sich von links an P annähert.

Auch hier folgt: $m = \frac{1}{2}x$

Dieses Ergebnis kann man nun sehr gut nutzen, um die Steigung des Graphen der Funktion f in den folgenden Punkten zu bestimmen.

$P(2 \mid 1)$: $x = 2 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

$P(1 \mid 0{,}25)$: $x = 1 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$P(3 \mid 2{,}25)$: $x = 3 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot 3 = 1{,}5$

$P(-2 \mid 1)$: $x = -2 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$

$P(-4 \mid 4)$: $x = -4 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot(-4) = -2$

Allgemein gilt somit für die Sekantensteigung durch die Punkte $P(x\,|\,f(x))$ und $P_h(x+h\,|\,f(x+h))$:

$$m_t = \underbrace{\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{Differenzenquotient}}}_{\text{Differenzialquotient}}$$

Durch bilden des Grenzwertes für $h \to 0$ erhält man die Tangentensteigung an der Stelle x.

Für den Differenzialquotienten schreibt man:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Schreibweise: $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$

Bedeutung: Leite die Funktion f nach x ab.

Man nennt $f'(x)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$, sie gibt die Steigung der Tangente an der Stelle x an.

Bemerkung: Die Ableitung an einer Stelle x_0 existiert genau dann, wenn rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differentialquotienten übereinstimmen. Also wenn gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

10.3 Ableitung einer Funktion

Da obiges Verfahren doch sehr aufwendig ist um die Ableitung einer Funktion f zu bestimmen, wollen wir nun „Regeln“ finden, mit deren Hilfe der Vorgang des Ableitens einfacher wird.

1.) $f: x \mapsto 2 \quad D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Also gilt: $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

2.) $f: x \mapsto c \quad D_f = \mathbb{R}; c \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Also gilt: $f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

Konstantenregel: Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Dabei ist $c \in \mathbb{R}$.

3.) $f: x \mapsto x \quad D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Also gilt: $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$

4.) $f: x \mapsto x^2 \quad D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

Also gilt: $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$

5.) $f: x \mapsto x^3 \quad D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2$$

Also gilt: $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$

Potenzregel: Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Dabei ist $n \in \mathbb{Z}$.

6.) $f: x \mapsto mx \quad D_f = \mathbb{R},\, m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)-mx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{m(x+h-x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} = \lim_{h\to 0} m = m$$

Also gilt: $f(x) = mx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = m$

7.) $f: x \mapsto ax^2 \quad D_f = \mathbb{R},\, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a\left[(x+h)^2 - x^2\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a \cdot \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = a \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}}_{2x} = a \cdot 2x = 2ax$$

Also gilt: $f(x) = ax^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2ax$

8.) $f: x \mapsto ax^3 \quad D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^3 - ax^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a\left[(x+h)^3 - x^3\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a \cdot \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = a \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}}_{3x^2} = a \cdot 3x^2 = 3ax^2$$

Faktorregel: Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = a \cdot x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Etwas allgemeiner gilt eigentlich: $f(x) = a \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot u'(x)$

Summenregel: Ist die Funktion f eine Summe von Potenfunktionen, so erhält man die Ableitungsfunktion f', indem man f summandenweise differenziert (ableitet).

Die Ableitung ist dann wieder eine Summe von Potenzfunktionen!

Allgemein gilt: $f(x) = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Beispiel: Ist $f(x) = x^3 + x^2$, dann folgt: $f'(x) = 3x^2 + 2x$

Übungen: Bilden Sie die Ableitung der Funktion f.

1.) $f(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

2.) $f(x) = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

3.) $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

4.) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

5.) $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

6.) $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

7.) $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

8.) $f(x) = 3x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

9.) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

10.) $f(x) = -4x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

11.) $f(x) = 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

12.) $f(x) = -2x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

13.) $f(x) = 3x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

14.) $f(x) = x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

15.) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

16.) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

17.) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

Aufgaben:

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2 - 2x - 3;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Steigung der Tangente im Punkt.

   a) $A(-1|0)$

   b) $B(1|-4)$

2. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Kurvenpunkt T.

   a) $f: x \mapsto 3x^3 - 4x \quad T(0|?)$

   b) $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 - x + 1 \quad T(1|?)$

   c) $f: x \mapsto x^4 - x^3 \quad T(2|?)$

3. Berechnen Sie den Schnittwinkel unter dem der Graph der Funktion f die x-Achse schneidet.
   Hinweis: Für den Schnittwinkel gilt: $\tan\alpha = m$

   a) $f: x \mapsto x^2 - 2x - 15;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

   b) $f: x \mapsto -\frac{2}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

   c) $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

   d) $f: x \mapsto (x^2 - 1)(x^2 - x - 2);\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

4. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes in welchem die Tangente an den Graphen der Funktion f parallel verläuft zur Geraden g.

   a) $f: x \mapsto 2x^2 + 2x - 1;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \qquad g: y = 8x + 1$

   b) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 1;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \qquad g: y = x - 1$

5. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes in welchem die Tangente an den Graph der Funktion f die angegebene Bedingung erfüllt.

   a) $f: x \mapsto x^2 - 2x - 1; \quad m_t = 2$

   b) $f: x \mapsto -x^2 + 4x - 2;$ Tangente ist parallel zur Geraden $g: y = 2x - 1$

   c) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 1{,}5x - 1;$ Tangente ist parallel zur x – Achse

6. Zeigen Sie, dass sich die Graphen der beiden Funktionen f und g senkrecht schneiden.

   a) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2; \quad g: x \mapsto \frac{5}{2} - \frac{1}{8}x^2$

   b) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x; \quad g: x \mapsto -\frac{2}{27}x^3 + 2x$

7. Ermitteln Sie, in welchem Punkt eine Parallele zur Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten den Graphen der Funktion $f: x \mapsto 3x^2 - 7x + 4$ berührt?

8. Gegeben ist die Funktion $f_k: x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - kx + 1$. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Tangente an G_{f_k} im Punkt $P(2|?)$ parallel verläuft zur Geraden $g: x \mapsto \frac{1}{2}x - 5$.

9. Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto x^2 + 2x + 1; \; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g_a: x \mapsto ax^2 - 0{,}5x + 1; \; \mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R}$ im Punkt $S(0|?)$ für jeden Wert von a orthogonal schneiden.

10. Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a: x \mapsto ax^2 - 2x + 1; \; \mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}; \; a \in \mathbb{R}$.

    a) Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die Tangente in $P(1|?) \in G_f$ durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft.

    b) Ermitteln Sie die Gleichung der Normalen durch P für beliebige Werte von a.

    c) Ermitteln Sie, für welche Werte von a die Tangente und die Normale durch P mit der y-Achse ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge 2,5 LE bilden.

11. Betrachtet wird die Schar von Funktionen $f_k: x \mapsto x^2 - kx; \; \mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}; k \in \mathbb{R}$ und den zugehörigen Graphen G_k.

    a) Zeichnen Sie für $k = 0$ und $k = 2$ die Graphen G_0 und G_2 in ein kartesisches Koordinatensystem ein. $(1\text{LE} \triangleq 2\,\text{cm})$

    b) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich alle Graphen G_k in genau einem Punkt schneiden.

    c) Berechnen Sie allgemein die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen G_k mit dem Graphen G_p der Funktion $p: x \mapsto \frac{1}{2} - x^2; \; \mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ und tragen Sie G_p in das bereits vorliegende Koordinatensystem ein.

    d) Zeigen Sie, dass alle Graphen G_k den Graphen G_p rechtwinklig schneiden.

12.0 Ein Körper fällt aus einer Höhe von $125\,m$ frei herab. Die Bewegung des Körpers wird durch die Zeit-Orts-Funktion $y(t) = 125 - 4{,}9t^2$ beschrieben.

12.1 Welche Höhe über dem Boden hat er nach einer Zeit von $0s$, $1s$, $2s$, $3s$, $4s$, $5s$ und $6s$?

t in s	0	1	2	3	4	5	6
h in m	125	120,1	105,4	80,9	46,6	2,5	-51,4
v in $\frac{m}{s}$	0	-9,8	-19,6	-29,4	-39,2	-49	

12.2 Nach welcher Zeit triff der Körper auf dem Boden auf?
12.3 Welche Momentangeschwindigkeit hat der Körper nach $0s$, $1s$, $2s$, $3s$, $4s$ und $5s$?
12.4 Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Körper auf dem Boden auf?
12.5 Welche Beschleunigung erfährt der Körper?
12.6.0 Ein Körper wird nun senkrecht nach oben geworfen. Seine Bewegung wird durch die Zeit-Orts-Funktion $y(t) = 20t - 4{,}9t^2$ beschrieben.

12.6.1 Nach welcher Zeit trifft er wieder auf dem Boden auf? Mit welcher Geschwindigkeit trifft er auf dem Boden auf?
12.6.2 Nach welcher Zeit hat er seine maximale Höhe erreicht? Wie Hoch ist er geflogen?

13.0 Die Bewegung eines Fahrzeugs erfolgt im Zeitintervall $0 \le t \le 60$ nach der Zeit-Orts-Funktion $y(t) = \frac{5}{18}t^2$. Die Maßzahl der Zeit bezieht sich auf die Einheit $1s$, die des Weges (Ortes) auf die Einheit $1m$.

13.1 Welchen Weg hat das Fahrzeug nach einer Zeit von $30s$ zurückgelegt und welche Momentangeschwindigkeit hat es zu diesem Zeitpunkt?

13.2 Nach welcher Zeit hat es eine Momentangeschwindigkeit von $20\frac{m}{s}$? Welchen Weg hat es zu diesem Zeitpunkt zurückgelegt?

14.0 Der zeitliche Verlauf der Wasserstoffperoxid-Zersetzung $\left(2H_2O_2 \rightarrow 2H_2O + O_2\right)$ kann durch folgende Funktion angenähert werden:

$$c(t) = 6t^2 - 120t + 700,\ 0 \le t \le 10$$

Die Maßzahl der Zeit bezieht sich auf die Einheit $1\,min$, die der Zersetzung c auf die Einheit $1\frac{mol}{m^3}$.

14.1 Wie groß ist der Grad der Zersetzung zu Beginn der Reaktionszeit? Wie groß ist er nach $4\,min$?

14.2 Wie groß ist die momentane Reaktionsgeschwindigkeit nach $4\,min$?
14.3 Nach welcher Zeit kommt die Reaktion zum erliegen? (Reaktionsgeschwindigkeit 0!)

15.0 Die Bewegung eines Fahrzeuges kann durch folgende Zeit-Orts-Funktion beschrieben werden:

$$s(t) = 15t - 1,5t^2$$

Die Maßzahl der Zeit bezieht sich auf die Einheit $1\,s$, die des Weges (Ortes) auf die Einheit $1\,m$.

15.1 Welchen Weg hat das Fahrzeug nach $1\,s$, $3\,s$, $5\,s$ bzw. $8\,s$ zurückgelegt?
15.2 Wie groß ist die entsprechende Geschwindigkeit zu diesen Zeiten?
15.3 Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit?
15.4 Nach welcher Zeit ist die Geschwindigkeit 0? Welchen Weg hat der Körper zu diesem Zeitpunkt zurückgelegt?
15.5 Wie groß ist die Beschleunigung des Körpers? Handelt es sich um einen Beschleunigungs- oder Bremsvorgang?

15.6.0 Die Geschwindigkeit eines Körpers ist durch die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion $v(t) = 15 - 0,5t$ gegeben.
15.6.1 Was lässt sich über die Bewegung aussagen?
15.6.2 Nach welcher Zeit steht der Körper?
15.6.3 Welchen Weg hat der Körper bis zum Stillstand zurückgelegt?

16.0 Eine Schnecke kriecht auf einer flachen Straße vom Startpunkt aus geradlinig immer in dieselbe Richtung. Modellhaft wird angenommen: Die Funktion s mit $s: t \mapsto s(t) = -\frac{20}{9}t^3 + 10t^2; \quad 0 \le t \le 3$ gibt den zurückgelegten Weg s (gemessen in Zentimetern) in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Minuten) wieder. Die 1. Ableitung der Funktion s nach der Variablen t ist die Geschwindigkeit der Schnecke zum entsprechenden Zeitpunkt t.
(Auf Benennungen wird bei den folgenden Rechnungen verzichtet)

16.1 Berechnen Sie den zurückgelegten Weg und die jeweilige Geschwindigkeit der Schnecke zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$.

16.2 Ermitteln Sie nach welcher Zeit die Schnecke ihre größte Geschwindigkeit erreicht hat. Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit?

17. Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - 2x - 3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Ermitteln Sie die x-Koordinaten aller Punkte, in denen der Graph G_f waagrechte Tangenten besitzt.

18. Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$; $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$ im Punkt $P(1|?)$ orthogonal schneiden.

19. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. In welchen Punkten ist die Tangente an den Graph der Funktion f parallel zur Geraden $g: x \mapsto 1,25x + 17$?

20. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die den Graph der Funktion f im Punkt $P(4|5)$ senkrecht schneidet.

Zeichnen Sie den Graph der Funktion f und die Gerade h in ein Koordinatensystem ein. $(-1 \le x \le 5)$

21. In welchen Punkte P_0 sind die Tangenten an G_f mit $f: x \mapsto x^3 + 1{,}5x^2 - 15x - 1$ parallel zur Geraden g mit $g: x \mapsto 3x - 1$?

22. Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^2$ und $g: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 4{,}5$ senkrecht schneiden!

23.0 Ermitteln Sie die Koordinaten derjenigen Punkte in denen der Graph G_f eine waagrechte Tangente besitzt.

23.1 $f: x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 36x$

23.2 $f: x \mapsto -x^4 + 18x^2 - 4$

23.3 $f: x \mapsto x^3 + 6x^2 - 135x$

23.4 $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 - 2$

23.5 $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 - 15x + 52$

23.6 $f: x \mapsto 2x^3 - 12x^2 + 18x$

23.7 $f: x \mapsto \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 1$

23.8 $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6$

23.9 $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 3$

24.0 Berechne Sie unter welchem Winkel sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.

24.1 $f: x \mapsto x^2$ $\quad g: x \mapsto x^2 + x - 1$

24.2 $f: x \mapsto x^2 - 2$ $\quad g: x \mapsto -x^2 - 2x + 2$

24.3 $f: x \mapsto -x^2 + x$ $\quad g: x \mapsto x^2 + x$

24.4 $f: x \mapsto -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ $\quad g: x \mapsto \frac{1}{7}x^2 - 2x$

24.5 $f: x \mapsto \frac{1}{6}\left(x^3 - 13x\right)$ $\quad g: x \mapsto -\frac{1}{6}\left(x^2 - 7x\right)$

24.6 $f: x \mapsto \frac{1}{6}x\left(7 - x^2\right)$ $\quad g: x \mapsto \frac{1}{6}x\left(x - 5\right)$

24.7 $f: x \mapsto -x\left(x^2 - 1\right)$ $\quad g: x \mapsto x\left(x - 1\right)$

$$\boxed{\tan\rho = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \quad \Rightarrow \quad \rho = \arctan\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|}$$

Gegeben sind die beiden Funktionen $f: x \mapsto -\frac{1}{4}(1-t)x^3 + (1-t)x^2 + tx$; $t \in \mathbb{R}$ und $g: x \mapsto -x^2 + 3x$, mit maximaler Definitionsmenge.

Die beiden Funktionsgraphen haben für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Stelle an der sie sich senkrecht schneiden.