Man will nicht nur glücklich sein,
sondern glücklicher als die Anderen.
Und das ist deshalb so schwer,
weil wir die Anderen für glücklicher halten,
als sie sind.
(Charles-Louis de Montesquieu)

§ 9 Lokale Änderungsrate

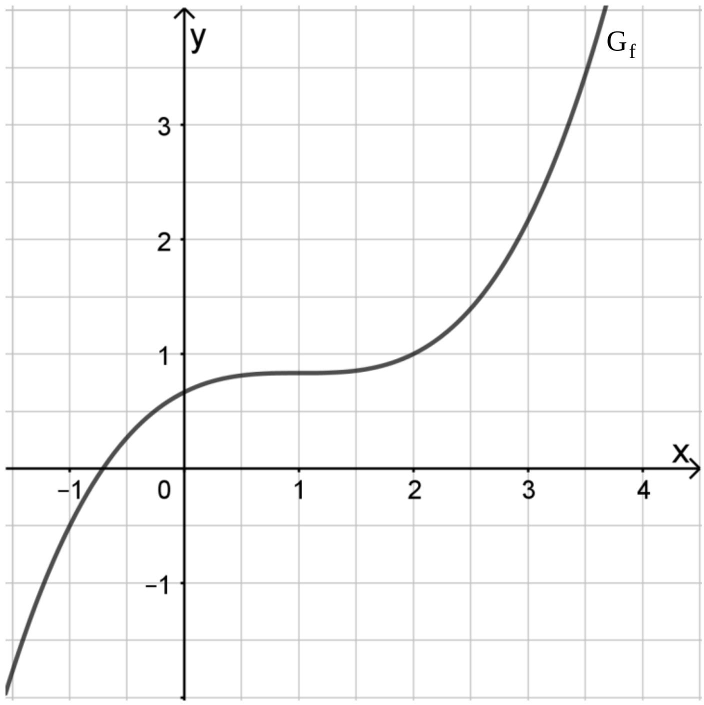
Im letzten Abschnitt haben wir die mittlere Änderungsrate der Funktionswerte in einem bestimmten Intervall ermittelt. Aber wie ist es mit dem Steigungsverhalten des Graphen in nur einem einzigen Punkt bzw. an einer bestimmten Stelle?

Die lokale (momentane) Änderungsrate der Funktion f in einer bestimmten Stelle x_0 entspricht der Steigung der Geraden, die durch den Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ verläuft und den Graphen der Funktion f berührt.
Die Steigung der Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt P gibt somit die Steigung des Graphen in diesem Punkt an.

Doch diese Steigung lässt sich nicht so einfach rechnerisch ermitteln wie bei der Berechnung der mittleren Änderungsrate, da man jetzt nicht mehr zwei Punkte besitzt (um die Steigung m zu bestimmen) sondern nur noch einen Punkt.

Eine relative einfache, jedoch keine mathematische, Methode ist die graphisch Bestimmung der Tangentensteigung. Dabei zeichnet man die Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt P ein und bestimmt die Steigung anhand der Zeichnung.

Beispiel 1:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$, $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f ist in folgender Abbildung dargestellt. Zeichnen Sie so genau wie möglich die Tangente an den Graph G_f im Punkt $P(2 \mid 1)$ ein und bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks die Steigung des Graphen im Punkt P.



Aufgaben:

1. Der Graph einer Funktion f ist in folgender Abbildung dargestellt.

   Bestimmen Sie mit Hilfe der Graphik die Steigung des Graphen im

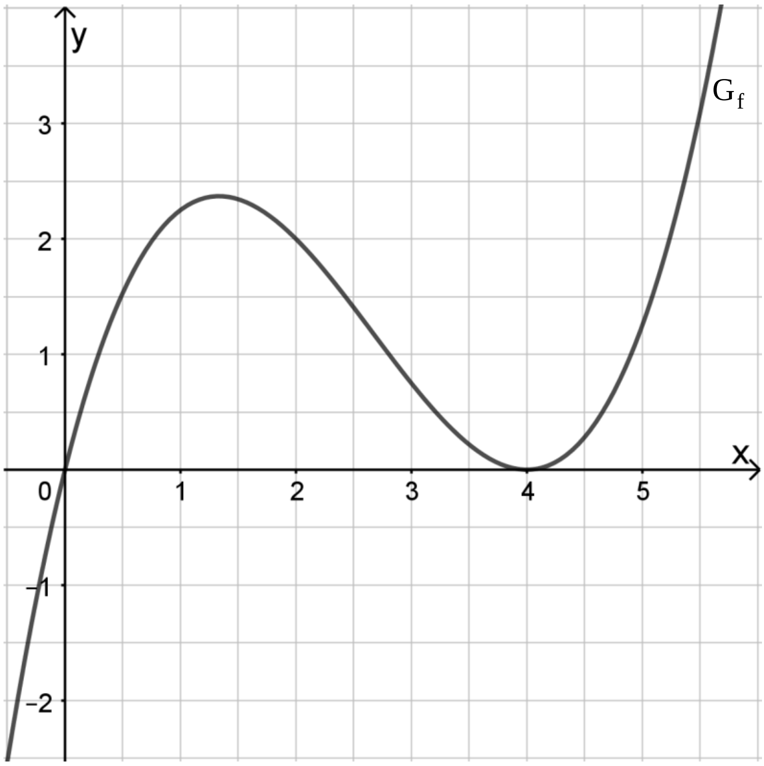
   a) Koordinatenursprung

   b) Punkt $P(0{,}5|1{,}5)$

   c) Hochpunkt

   d) Wendepunkt

   e) Tiefpunkt



2.0 Der schiefe Turm in Pisa hat eine Höhe von 50 Metern. Lässt man von der geneigten Oberkante des Turms einen Körper frei nach unten fallen (freier Fall), so gilt für die Höhe des Körpers in Abhängigkeit der Flugzeit t (in s) $h(t) = 50 - 5t^2$ (in m).

2.1 Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbildung die Geschwindigkeit des Körpers

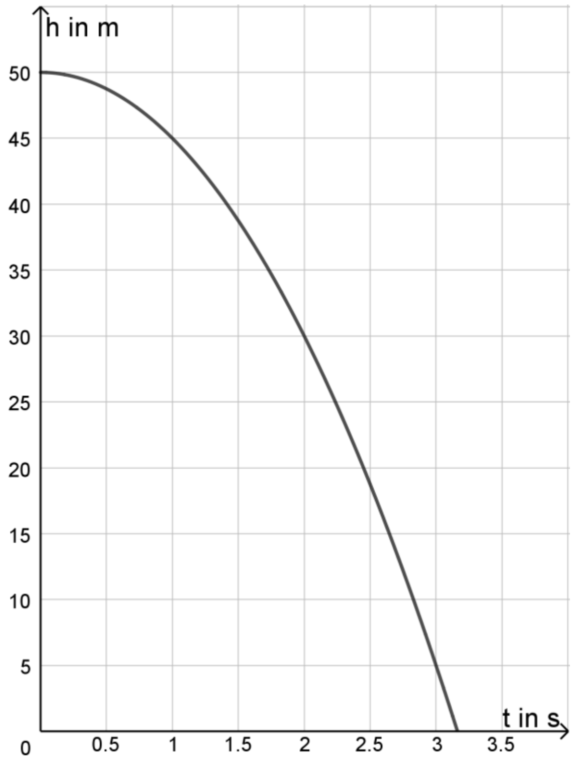
   a) zum Zeitpunkt $t = 0$.

   b) nach Durchfallen einer Höhe von 5 m.

   c) nach 2 Sekunden Flugzeit.

   d) beim Auftreffen auf den Erdboden.

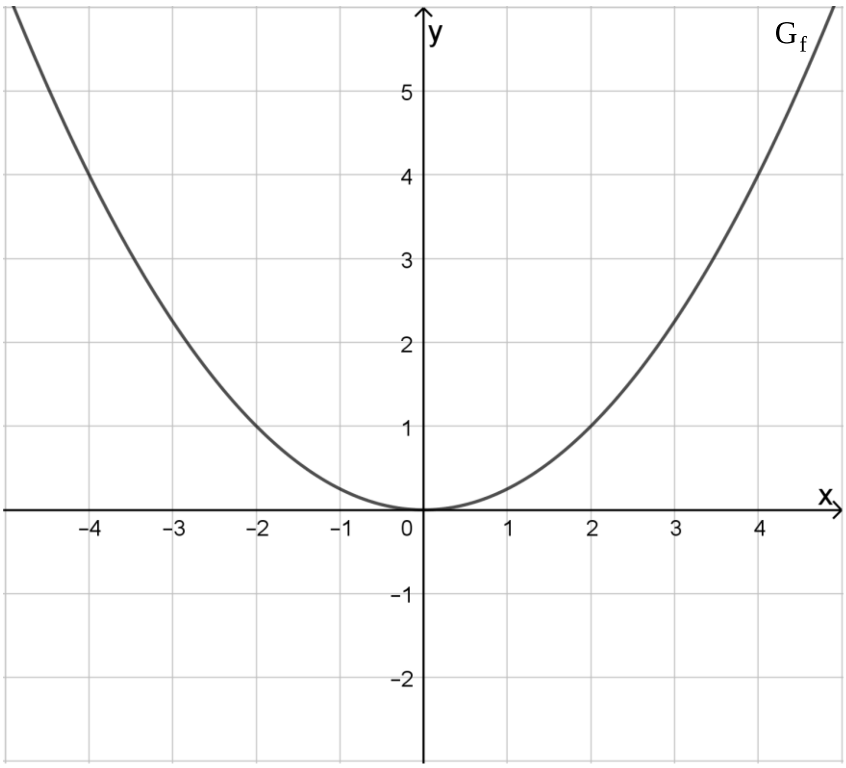
2.2 Erklären Sie, woran man erkennt, dass die Geschwindigkeit des Köpers während des Fluges nicht konstant ist.



3.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und der Defintionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f ist in folgendem Koordinatensystem abgebildet.

3.1 Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen der Funktion f die Steigung des Graphen an den in der Tabelle angegeben Stellen und tragen Sie die Steigungswerte m in die Tabelle ein.

x	m
−4	
−3	
−2	
0	
1	
2	
3	



3.2 Übertragen Sie nun die Werte der Tabelle in obiges Koordinatensystem.
(Hinweis: Tragen Sie den Steigungswert m als y-Wert ab.)
Die eingezeichneten Werte liegen auf einer Geraden. Geben Sie die Gleichung der Geraden an.