Das Leben ist zu kurz
um ein langes Gesicht zu machen.
(Giuliano Füller)

§ 8 Mittlere Änderungsrate

Im letzten Kapitel haben wir uns im Abschnitt 7.3 mit dem Monotonieverhalten des Graphen einer Funktion f (bzw. dem Monotonieverhalten der Funktion f) beschäftigt. So verlief zum Beispiel der Graph einer Funktion f in einem bestimmten Intervall streng monoton steigend, aber nicht an jeder Stelle gleichmäßig „steil“.

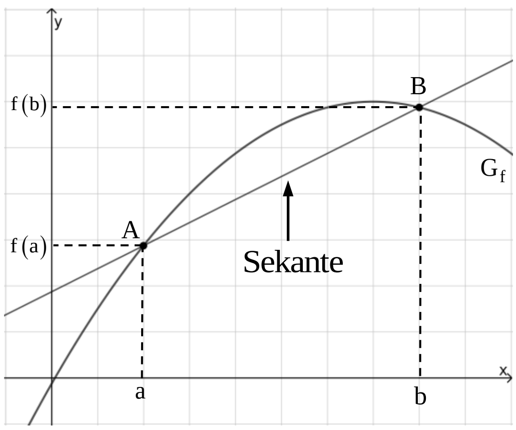
In der Realität verlaufen dynamische (sich ändernde) Vorgänge auch nicht gleichmäßig ab, sondern unterliegen im Verlaufe der Zeit (oder des Vorgangs) unterschiedlichen Schwankungen. So ändert sich z. Bsp.

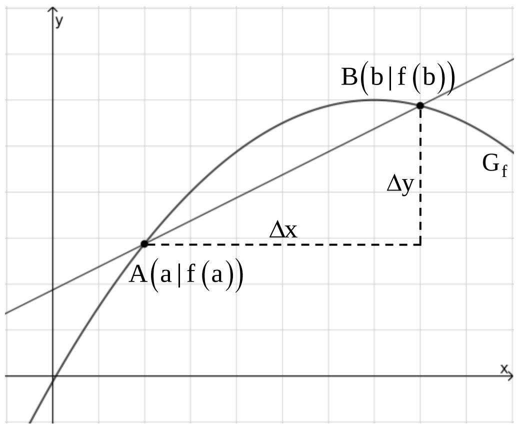
- die Bevölkerungszahl eines Landes
- der Durchmesser eines Baumes
- die Anzahl der Bakterien
- die Geschwindigkeit eines Autos
- der Zufluss (oder Abfluss) in (aus) ein Gefäß
- …

nicht gleichmäßig, da unterschiedliche Faktoren die entsprechenden Größen beeinflussen. Bei solchen Vorgängen kommt es auch oft nicht (nur) auf den aktuellen Bestand an, sondern meist darauf, wie schnell sich die Größe in einem bestimmten (Zeit-) Intervall ändert.

Mathematisch gesehen wollen wir nun das Steigungsverhalten des Graphen in einem bestimmten Intervall oder an einer bestimmten Stelle bestimmen.

Die mittlere (durchschnittliche) Änderungsrate für eine Funktion f in einem Intervall $[a;b]$ entspricht der Steigung der Geraden, die durch die beiden Punkte $A(a\,|\,f(a))$ und $B(b\,|\,f(b))$ verläuft.





Für die Steigung der Sekante des Graphen durch die Punkte A und B gilt:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bemerkung: Den Term $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nennt man auch Differenzenquotienten.

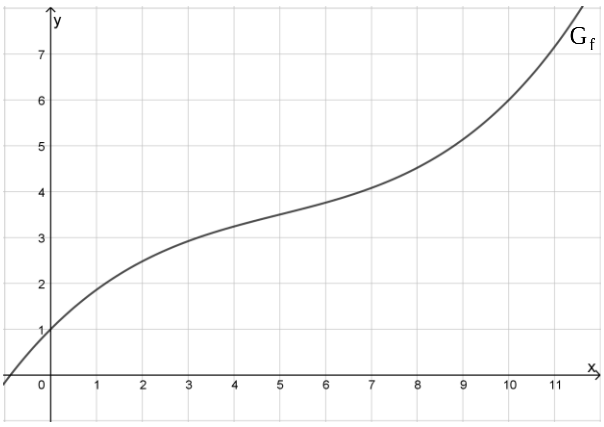
Eine mittlere Änderungsrate ist in der Mathematik ist somit eigentlich nichts anderes als eine „mittlere Steigung“ des Graphen in einem bestimmten Bereich.

Sie kann aber auch eine mittlere

- Geschwindigkeit
- Volumenänderung
- ….

sein.

Beispiel 1:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=0{,}01x^3-0{,}15x^2+x+1$ und der Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f ist in nebenstehender Abbildung dargestellt.
Berechnen Sie die mittlere Steigung des Graphen der Funktion f im Intervall $[0;10]$.



Es gilt: $m=\frac{f(10)-f(0)}{10-0}=\frac{6-1}{10}=0{,}5$

Zeichnen Sie nun die entsprechende Sekante in obige Abbildung ein und überprüfen Sie, ob diese die Steigung $m=0{,}5$ besitzt.

Beispiel 2:
Pflanzen produzieren bei der Fotosynthese Sauerstoff, den sie an ihre Umgebung abgeben. Diese Sauerstoffproduktion kann für einen bestimmten Baum für die Zeit zwischen 6 Uhr morgens (Sonnenaufgang) und 18 Uhr abends (Sonnenuntergang) durch die Funktion V mit $V(t)=-t^3+20t^2$ sehr gut beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit (in Stunden) gemessen ab Sonnenaufgang und V gibt die Menge des insgesamt produzierten Sauerstoffs in Liter an.
Ermitteln Sie, wie viel Sauerstoff der Baum zwischen 10 Uhr und 15 Uhr durchschnittlich pro Stunde abgibt.

$$\overline{V}=\frac{V(9)-V(4)}{9-4}=\frac{891-256}{5}=127$$

In der Zeit zwischen 10 Uhr und 15 Uhr produziert der Baum durchschnittlich 127 Liter Sauerstoff pro Stunde.

Aufgaben:

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0{,}05x^3 + 0{,}55x^2 - 0{,}95x + 1{,}55$ und der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
   Berechnen Sie die mittlere Steigung des Graphen der Funktion f
   a) im Intervall $[1;6]$
   b) zwischen den Punkten $P(6 \mid f(6))$ und $Q(10 \mid f(10))$.

2. Gegeben ist der Graph einer Funktion h.

   Entnehmen Sie der Graphik so gut wie möglich die mittlere Steigung in den Intervallen $[0;4]$ und $[4;14]$.

3. Ein Bergprofil wird für $0 \le x \le 6$ beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = 0{,}001 \cdot \left(x^3 + 6x^2\right)$. Dabei entspricht eine Längeneinheit $500\,\text{m}$. Ermitteln Sie, welche mittlere Steigung der Berg aufweist.

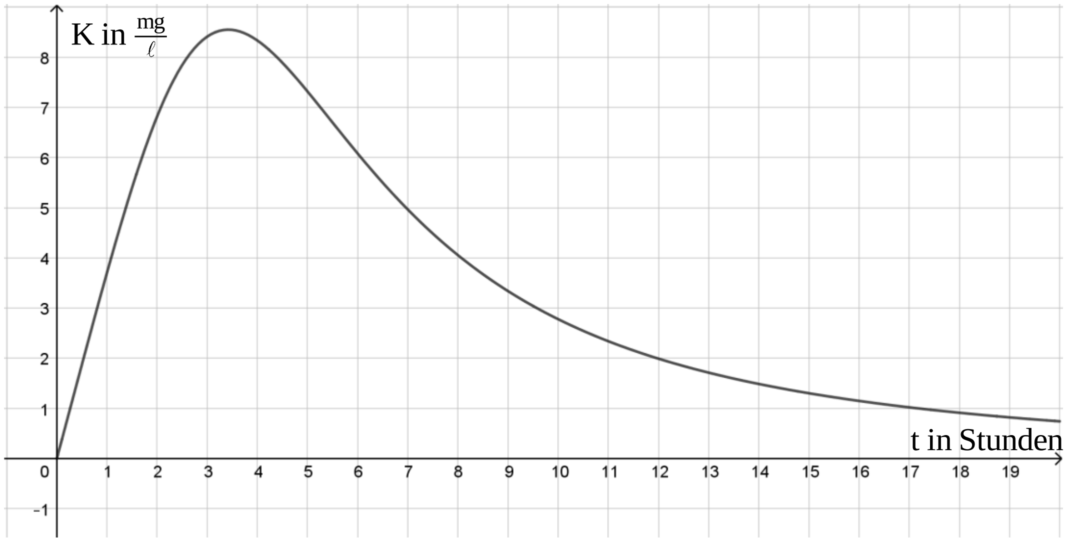
4. Ein Temperaturverlauf wird beschrieben durch die Funktion T mit $T(t) = \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}t - 4$. Dabei gibt t die Zeit in Stunden seit Beginn der Messung an und $T(t)$ die Temperatur in °C. Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperaturänderung in den ersten sechs Stunden.

5. Chemische Reaktionen können mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ablaufen. Bringt man z. Bsp. Zink in Salzsäure, so entsteht Wasserstoff. Die folgende Tabelle gibt die Menge des Wasserstoffs in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) an.

Zeit in s	2	4	6	8	10	12
Menge H_2 in ml	21	30,5	35,5	40,5	42,5	43

   Ermitteln Sie die durchschnittliche Änderungsrate zwischen den einzelnen Messungen und interpretieren Sie ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

6.0 Die Konzentration K eines Medikaments im Blut eines Patienten hängt von der Zeit t nach Einnahme dieses Medikaments ab.



6.1 Entnehmen Sie der Graphik in welchem Zeitintervall nach Einnahme des Medikaments die Konzentration im Blut gestiegen ist. Wie hoch war die maximale Konzentration des Medikaments im Blut?

6.2 Nach welcher Zeit war die Konzentration weniger als $1\frac{mg}{\ell}$?

6.3 Ermitteln Sie, wie groß die mittlere Konzentrationsänderung in den ersten beiden Stunden nach Einnahme des Medikaments war.

6.4 Ermitteln Sie die mittlere Konzentrationsänderung in den Zeitintervallen $[4;8]$ und $[12;16]$. Erklären Sie, woran man eine Zu- bzw. Abnahme der Konzentration erkennen kann.

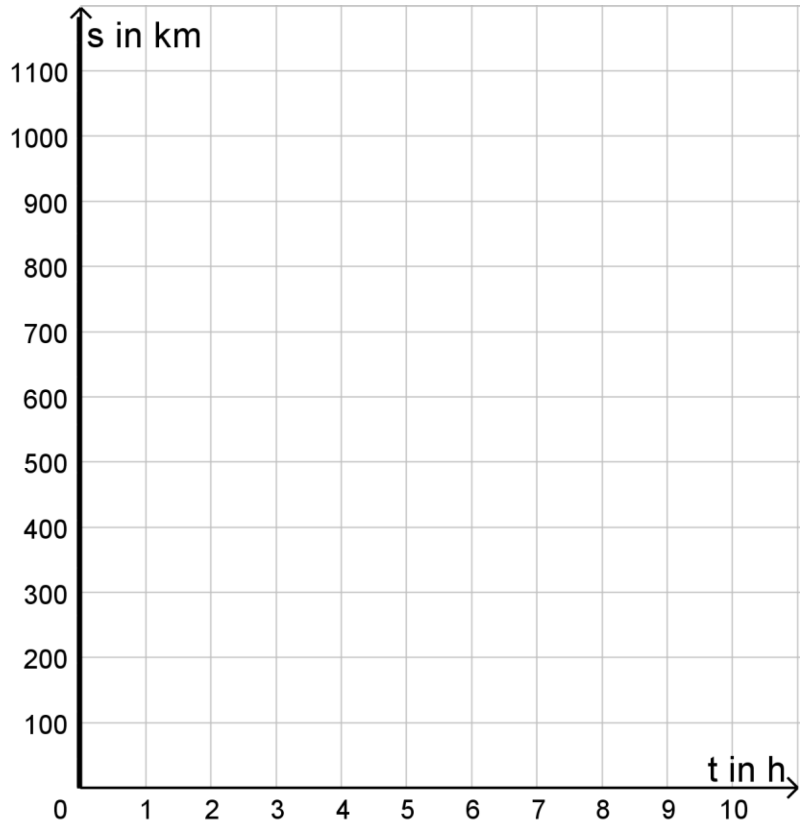
7.0 Ein Regenrückhaltebecken füllt sich nach anhaltenden Regenfällen. Das Wasservolumen V im Becken (in Mio. m^3) lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) wie folgt beschreiben: $V(t) = -0,015t^3 + 0,26t^2 + 0,25$

7.1 Bestimmen Sie zunächst die Wassermenge im Regenrückhaltebecken zu Beginn der Zeitrechnung.

7.2 Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderungsrate des Wasservolumens am ersten Tag sowie für die ersten drei Tage.

8.0 In folgender Tabelle sind die Daten für die zurücklegte Strecke eines Autos über eine Fahrt von 10 Stunden notiert.

t in h	$s(t)$ in km
0	0
2	150
4	400
6	800
8	950
10	1000

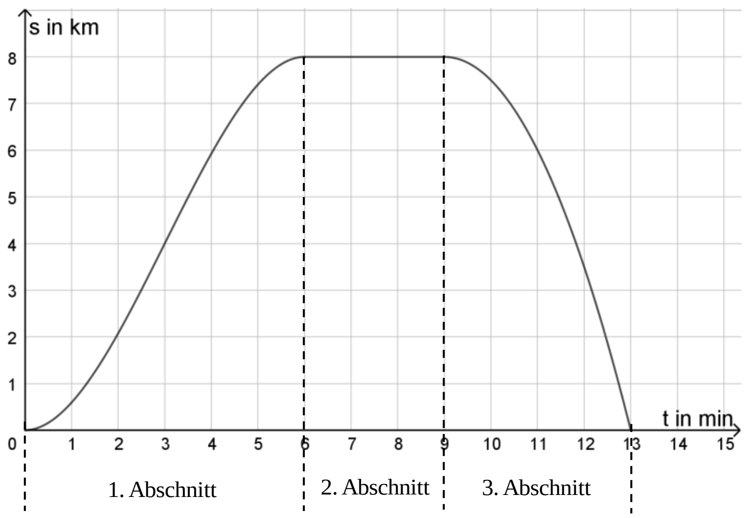


8.1 Tragen Sie die Messpunkte in das Koordinatensystem ein und verbinden Sie die einzelnen Punkte. Begründen Sie, zwischen welchen Zeitpunkten das Auto die höchste Geschwindigkeit hatte und berechnen Sie diese.

8.2 Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit über die gesamte Fahrzeit.

9. Bei einem Fahrzeug wird während einer Fahrt die zurückgelegte Strecke aufgezeichnet. Nebenstehende Grafik zeigt den Graphen der Funktion $s: t \mapsto s(t)$.

Die Zeit t wird dabei in Minuten und die Strecke s in Kilometer gerechnet.



Ermitteln Sie für die drei einzelnen Bewegungsabschnitte jeweils die Durchschnittsgeschwindigkeit. Vergleichen Sie diese Werte und interpretieren Sie ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.