Religion und Mathematik
sind nur verschiedene Ausdrucksformen
derselben göttlichen Exaktheit.
(Kardinal Michael Faulhaber)

§ 7 Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

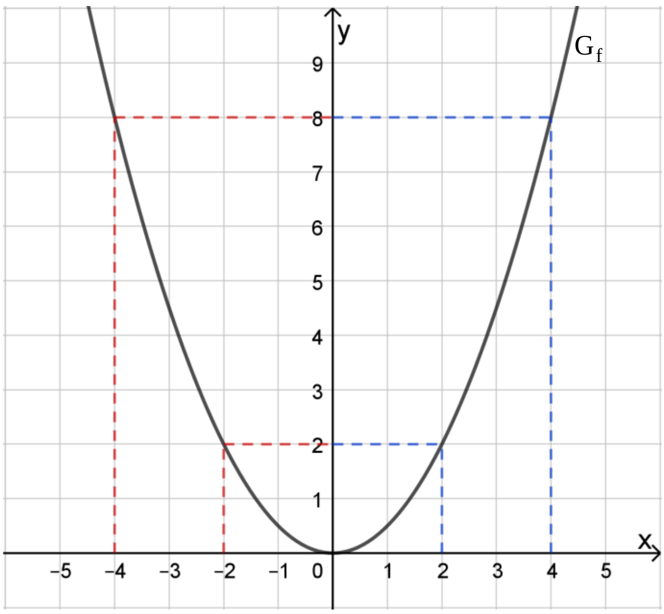
Bisher haben wir versucht nur mit der Kenntnis der Nullstellen der Funktion f ein Bild vom Verlauf des Graphen zu machen. Aber es gibt noch andere Merkmale bzw. Eigenschaften, die den Verlauf des Graphen charakterisieren bzw. beschreiben.

7.1 Symmetrie des Graphen

Prinzipiell unterscheiden wir zwei Arten der Symmetrie

7.1.1 Achsensymmetrie zur y-Achse

Gegeben sei zunächst die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2$. Der Graph der Funktion f ist in folgendem Diagramm dargestellt.



Es ist unschwer zu erkennen, dass der Graph G_f achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft. Wählt man zwei zur y-Achse symmetrisch liegende x-Werte (-2 und 2 oder auch -4 und 4), so gilt:

$$f(-2)=f(2)$$

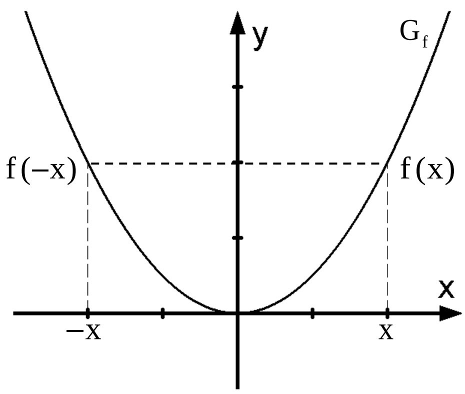
aber auch

$$f(-4)=f(4)$$

Ganz allgemein gilt:
Der Graph G_f von $f: x \mapsto f(x);\ x \in D_f$ ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn für alle $x \in D_f$ gilt:

i) $f(-x)=f(x)$

ii) D_f ist symmetrisch ist.



Bspe.: Zeigen Sie, dass die Graphen folgender Funktionen symmetrisch zur y-Achse verlaufen.

1.) $f: x \mapsto 2x^2 - 4;\ D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = 2(-x)^2 - 4 = 2x^2 - 4 = f(x)$

$D_f = \mathbb{R}$ ist sym.

Somit ist der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse.

2.) $f: x \mapsto -3x^4 + 2x^2 - 1;\ D_f = [-4;4]$

$f(-x) = -3(-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 = -3x^4 + 2x^2 - 1 = f(x)$

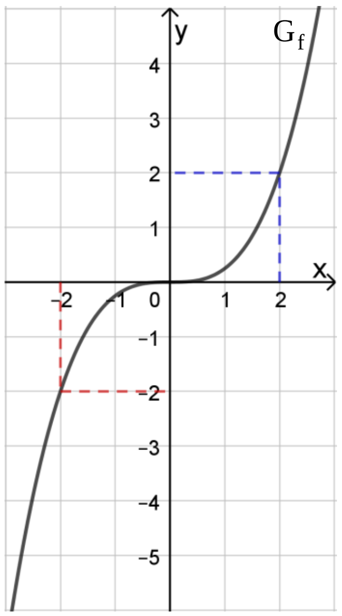
$D_f = [-4;4]$ ist sym.

Somit ist der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse.

<u>Merke</u>: Alle ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen), die nur gerade Exponenten besitzen (und eine symmetrische Definitionsmenge haben) sind achsensymmetrisch zur y-Achse; man nennt sie gerade Funktionen.

7.1.2 Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung

Gegeben sei zunächst die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3$. Der Graph der Funktion f ist in folgendem Diagramm dargestellt.



Es ist unschwer zu erkennen, dass der Graph G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft.

Wählt man wieder zwei zur y-Achse symmetrisch liegende x-Werte (-2 und 2), so gilt:

$$f(-2) = -2 \text{ und } f(2) = 2$$

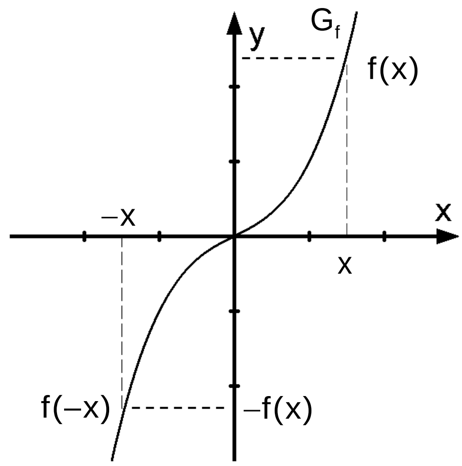
also

$$f(-2) = -f(2)$$

Ganz allgemein gilt:
Der Graph G_f von $f: x \mapsto f(x);\ x \in D_f$ ist genau dann punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn für alle $x \in D_f$ gilt:

i) $f(-x) = -f(x)$

ii) D_f ist symmetrisch ist.



Bspe.: Zeigen sie, dass die Graphen folgender Funktionen punktsymmetrisch zum Ursprung verlaufen.

1.) $f: x \mapsto x^3 - x;\ D_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$

$D_f = \mathbb{R}$ ist sym.

Somit ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

2.) $f: x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + 3x;\ D_f = [-3;3]$

$f(-x) = -\frac{1}{3}(-x)^3 + 3\cdot(-x) = -\frac{1}{3}\cdot(-x^3) - 3x = \frac{1}{3}x^3 - 3x = -\left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x\right) = -f(x)$

$D_f = [-3;3]$ ist sym.

Somit ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Merke: Alle ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen), die nur ungerade Exponenten besitzen (und eine symmetrische Definitionsmenge) sind punktsymmetrisch zum Ursprung; man nennt sie ungerade Funktionen.

Aufgaben

1. Gegeben ist jeweils die Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Untersuchen Sie „rechnerisch“, ob der Graph der Funktion f ein Symmetrieverhalten zum Koordinatensystem auf aufweist.
   a) $f: x \mapsto 3x^4 - x^2 + 4$
   b) $f: x \mapsto -4x^3 + x$
   c) $f: x \mapsto x(x^2 - 4)$
   d) $f: x \mapsto x^2(x - 4)$
   e) $f: x \mapsto x(x-5)(5+x)$
   f) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 2x$
   g) $f: x \mapsto x(x-4)(x+2)$

2. Begründen Sie, ob bei den folgenden Funktionsgraphen eine Symmetrie vorliegt oder nicht.
   a) $f: x \mapsto -4x^3 + 4;\ D_f = \mathbb{R}$
   b) $f: x \mapsto -\frac{1}{4}x^3 + 4x;\ D_f = \mathbb{R}$
   c) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x(x-2)(x+\frac{1}{4});\ D_f = \mathbb{R}$
   d) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1;\ D_f = [0;\infty]$
   e) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x(x-2)^2(x+2);\ D_f = \mathbb{R}$
   f) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x(x-2)^2(x+2)^2;\ D_f = \mathbb{R}$
   g) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2(x^2+2);\ D_f = \mathbb{R}$

Merke:
Hat der Graph einer Funktion f keine symmetrisch liegenden Nullstellen, dann kann der Graph der Funktion f auch keine Symmetrie zum Koordinatensystem aufweisen.
Weist der Graph einer Funktion f eine Symmetrie auf, dann sind auch seine Nullstellen symmetrisch und die Vielfachheit symmetrisch liegender Nullstellen stimmen jeweils überein.

3. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm $f(x)$ an.
   a) Die Funktion f ist vom Grad 4 und hat an der Stelle $x = 2$ eine einfache Nullstelle. Der Graph der Funktion f verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse.
   b) Die Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ eine doppelte Nullstelle. Der Graph der Funktion f verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse.
   c) Der Graph der Funktion f verläuft punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung und hat an der Stelle $x = 3$ eine einfache und an der Stelle $x = -5$ eine doppelte Nullstelle.
   d) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 5, der Graph der Funktion f verläuft punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung und hat die einfachen Nullstellen $x = 2$ und $x = -2$.
   e) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 4, der Graph der Funktion f besitzt keine Symmetrie und die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine doppelte Nullstelle.

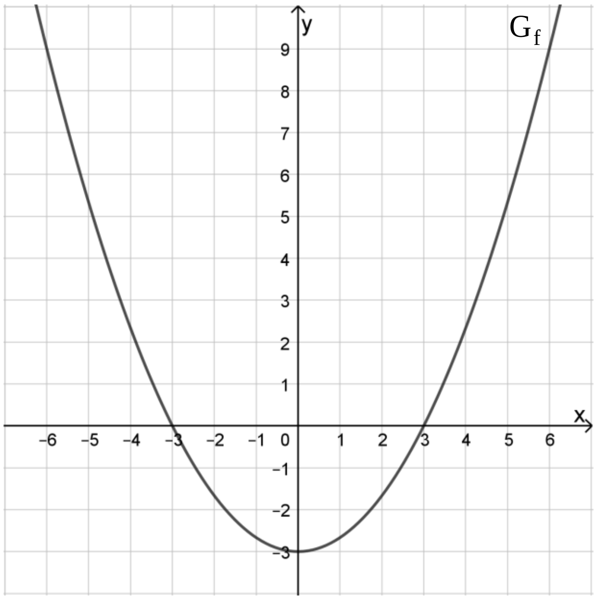
7.2 Globalverhalten des Graphen

Mit dem „Globalverhalten“ des Graphen ist gemeint, wohin dieser für sehr große x-Werte und auch sehr kleine (negativ große!) x-Werte verläuft. Also verläuft der Graph nach oben oder nach unten?

Werden die x-Werte sehr groß, unendlich groß, so schreibt man in der Mathematik: $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ wenn die x-Werte unendlich klein werden.

Dann interessiert man sich, wie sich denn die zur Funktion zugehörigen Funktionswerte $y = f(x)$ verhalten. Werden diese auch unendlich groß oder unendlich klein? Also gilt $f(x) \to \infty$ oder $f(x) \to -\infty$

Beispiel: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$ mit dem Graphen G_f .



In unserem Beispiel gilt: Für

$$x \to \infty \quad \text{gilt } f(x) \to \infty$$

und für

$$x \to -\infty \quad \text{gilt } f(x) \to \infty$$

Wir wollen es aber etwas mathematischer behandeln und schreiben:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \to \infty$$

bzw.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \to \infty$$

Aber das ist/war uns ja schon bekannt, da der Graph vom Typ „kommt von oben geht nach oben“ ist. Es entscheiden letztendlich der Formfaktor und der Grad der Funktion f über das Globalverhalten des Funktionsgraphen.

Beispiel: Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte der Funktion f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$

1.) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 10x + 1$

Da der Funktionsgraph vom Typ „kommt von unten geht nach unten" ist, gilt:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \to -\infty$

2.) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 10x^2 + 2x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \to -\infty$

3.) $f(x) = 2x^4 - 100x^3 + 2x^2 - 3x + 7$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \to \infty$

Aufgaben

4. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte der Funktion f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 1$

b) $f(x) = -2x^4 + x^2 - 2$

c) $f(x) = \frac{4}{7}x(x-2)(x+3)$

d) $f(x) = -\frac{4}{7}x(x-2)(2-x)$

e) $f(x) = -x\left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4\right)$

f) $f(x) = \left(2x^2 - x + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right)$

g) $f(x) = \left(-2x^2 - x + 2\right)^2$

7.3 Monotonieverhalten und lokale Extrema

Definition:

Die Funktion $f: x \mapsto f(x);\ x \in D_f$ heißt streng monoton

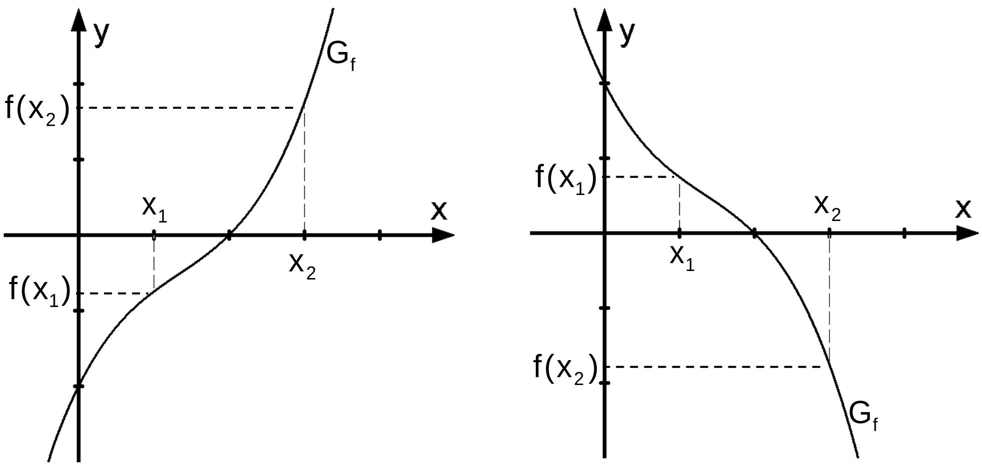
zunehmend	abnehmend

wenn mit zunehmendem x der Funktionswert $f(x)$

zunimmt	abnimmt

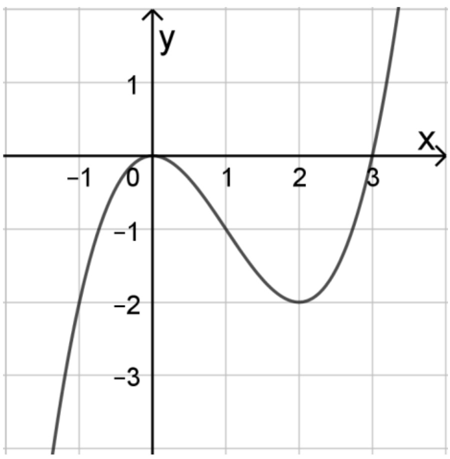
oder wenn für alle $x_1, x_2 \in D_f$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$	$f(x_1) > f(x_2)$



Ist die Funktion streng monoton abnehmend (zunehmend), dann ist der Graph der Funktion in diesem Bereich streng monoton fallend (steigend).

Beispiel: Gegeben ist der Graph der ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Geben Sie die Intervalle an, in denen der Graph der Funktion f streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt.



G_f ist streng monoton steigend in $\left]-\infty, 0\right]$ und in $\left[2; \infty\right[$.

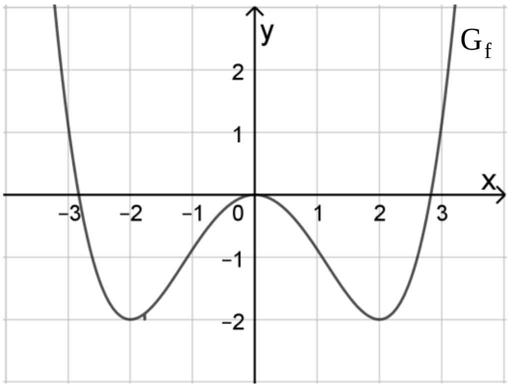
G_f ist streng monoton fallend in $\left[0; 2\right]$.

Bemerkung: Stellt man sich den Verlauf des Graphen als Profil eines Berges vor, so sind die Bereiche, in denen man den Berg hinauf steigen müsste auch die Bereiche, in denen der Graph streng monoton steigt. Und die Bereiche bei welchen man den Berg hinab steigen würde, wären die, in denen der Graph streng monoton fällt.

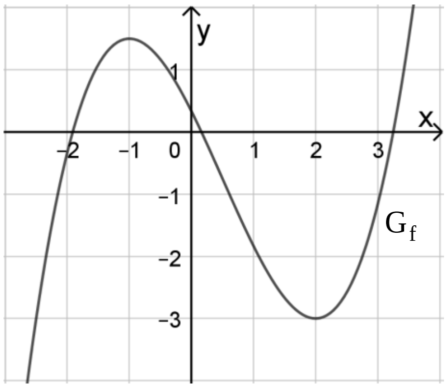
Aufgaben:

5. Geben Sie zu folgenden Funktionen bzw. Funktionsgraphen die Monotonieintervalle an.

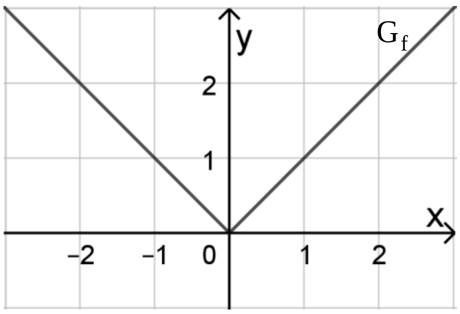
a) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$



b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3}$



c) $f(x) = |x|$ (Betragsfunktion!)



d) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

e) $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 - 3$

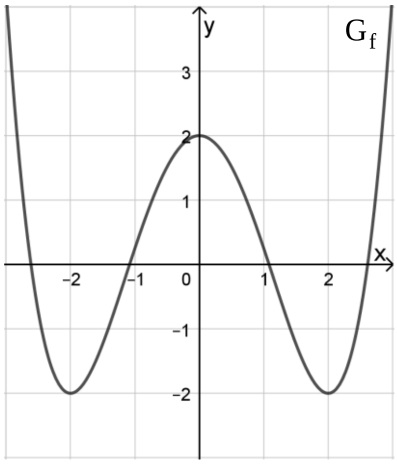
f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$

Stellen, an denen der Graph sein Monotonieverhalten von „streng monoton steigend“ in „streng monoton fallend“ ändert nennt man auch **Maximalstellen**, die zugehörigen Kurvenpunkte **lokale (relative) Hochpunkte**.
Stellen, an denen der Graph sein Monotonieverhalten von „streng monoton fallend“ in „streng monoton“ steigend ändert nennt man auch **Minimalstellen**, die zugehörigen Kurvenpunkte **lokale (relative) Tiefpunkte**.

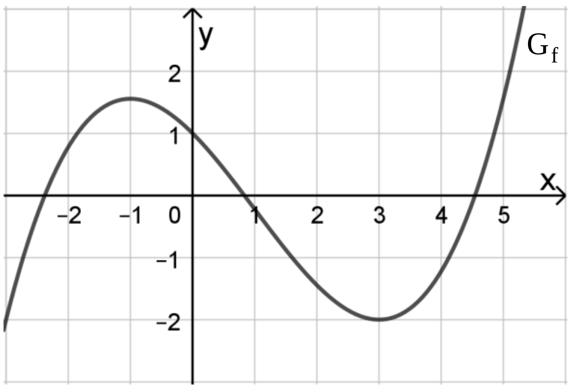
Aufgaben:

6. Entnehmen Sie der Graphik die Koordinaten der lokalen Hoch- bzw. Tiefpunkte und geben Sie die Monotonieintervalle an.

a) $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+2$

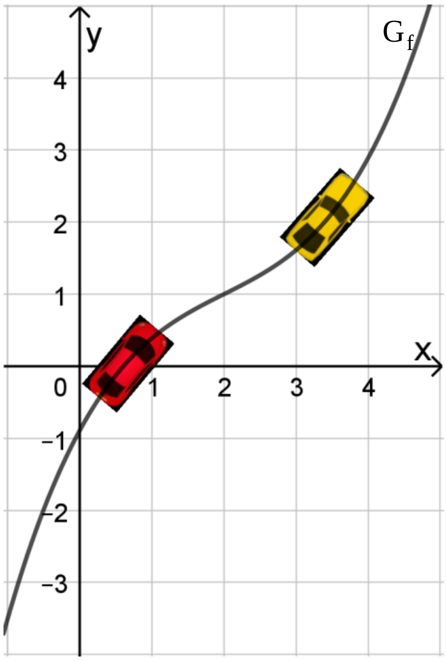


b) $f\left(x\right)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-x+1$



7.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkt

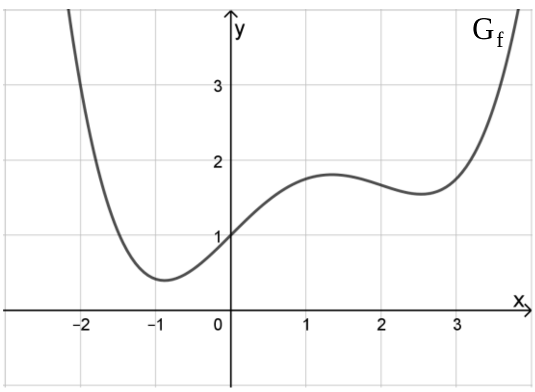
Bei dem Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion müssen wir zunächst auf eine mathematische Definition verzichten. Aber anschaulich lässt sich die Krümmung des Graphen bzw. das Krümmungsverhalten sehr einfach erklären.
Stellt man sich den Verlauf des Graphen als Straße vor, auf der man mit dem Auto fahren würde, so wäre der Graph immer dann rechtsgekrümmt, wenn das Lenkrad des Autos rechts eingeschlagen wäre (Rechtskurve) und linksgekrümmt, wenn das Lenkrad links eingeschlagen wäre (Linkskurve) um die Straße zu befahren.



G_f ist rechtsgekrümmt in $\left]-\infty;2\right]$.

G_f ist linksgekrümmt in $\left[2;\infty\right[$.

Beispiel: Gegeben ist der Graph der ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Geben Sie die Intervalle an, in denen der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt bzw. linksgekrümmt ist.



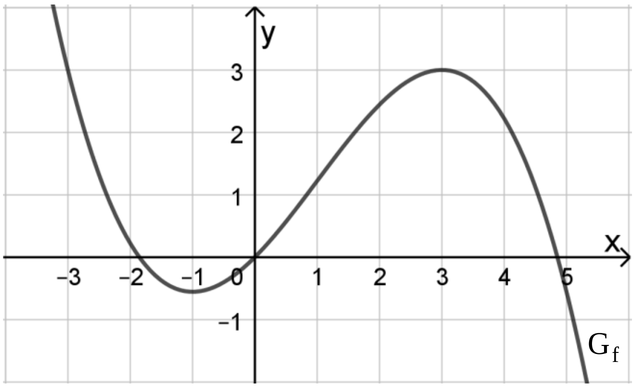
G_f ist linksgekrümmt in $\left]-\infty;0\right]$ und in $\left[2;\infty\right[$.

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left[0;2\right]$.

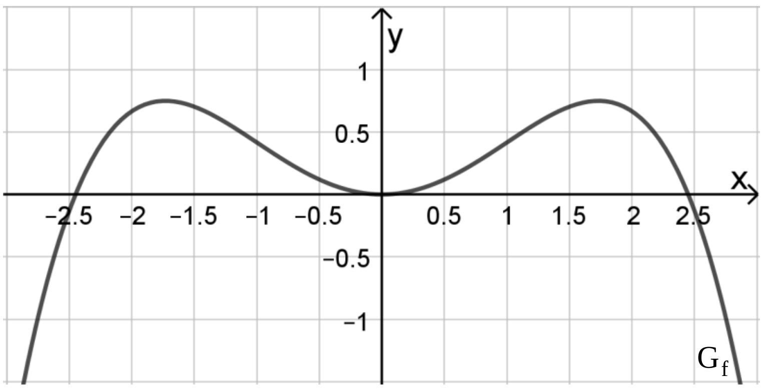
Aufgaben:

7. Geben Sie zu folgenden Funktionen bzw. Funktionsgraphen die Krümmungsintervalle an.

a) $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x$



b) $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

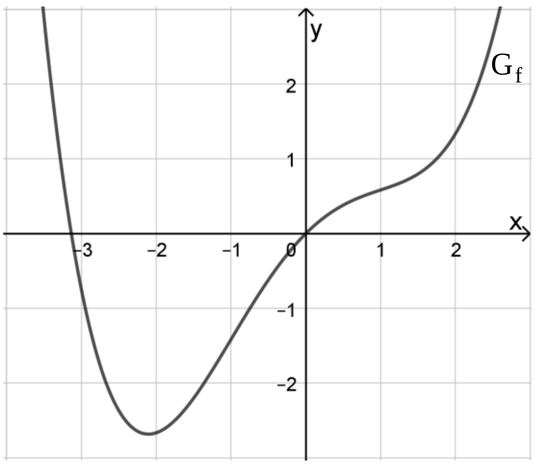


Stellen, an denen der Graph sein Krümmungsverhalten ändert nennt man **Wendestellen**, die zugehörigen Kurvenpunkte **Wendepunkte**.

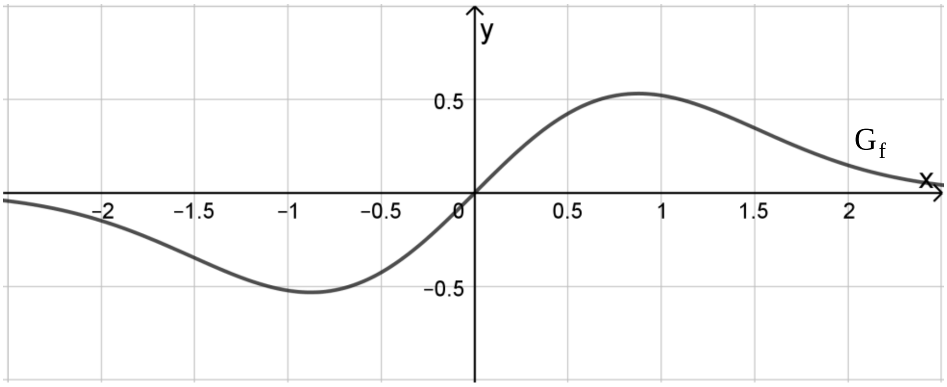
Aufgaben:

8. Entnehmen Sie der Graphik die Koordinaten der/s Wendepunkte(s) und geben Sie die Krümmungsintervalle an.

a) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x$

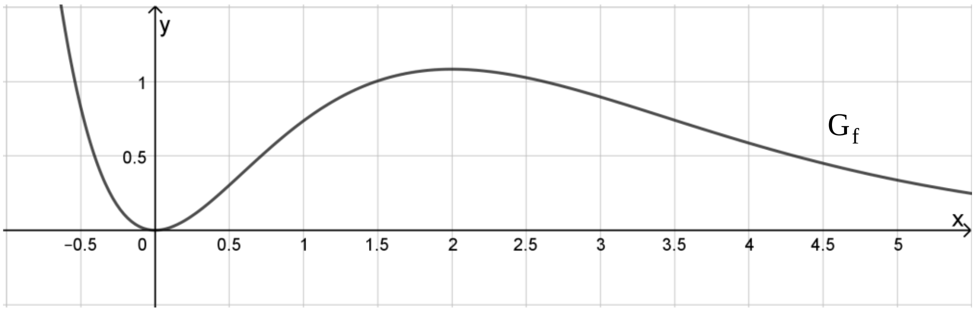


b) $f(x) = x \cdot e^{-0{,}65x^2}$

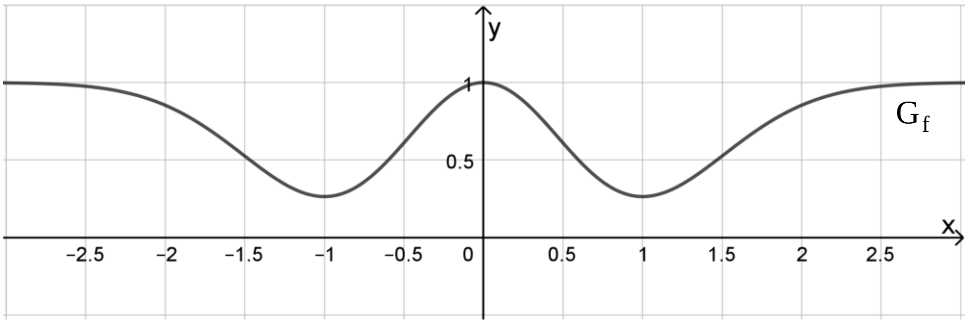


9. Zeichnen Sie in folgende Graphiken sämtliche Wendepunkte, lokalen Hochpunkte und lokalen Tiefpunkte ein und geben Sie so genau wie möglich deren Koordinaten an.

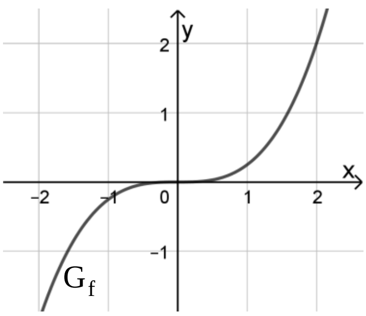
a)

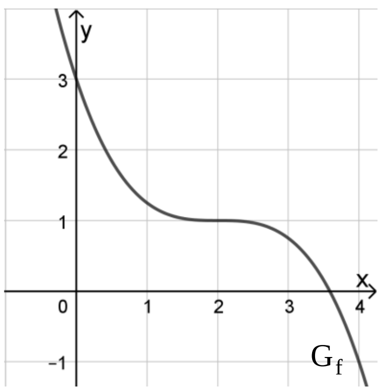


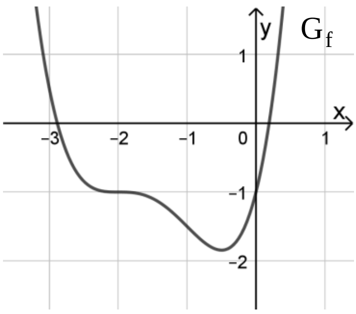
b)



Hat ein Wendepunkt zusätzlich einen Verlauf parallel zur x-Achse, so nennt man diesen auch **Terrassenpunkt**. Hier einige Beispiel für einen Terrassenpunkt.





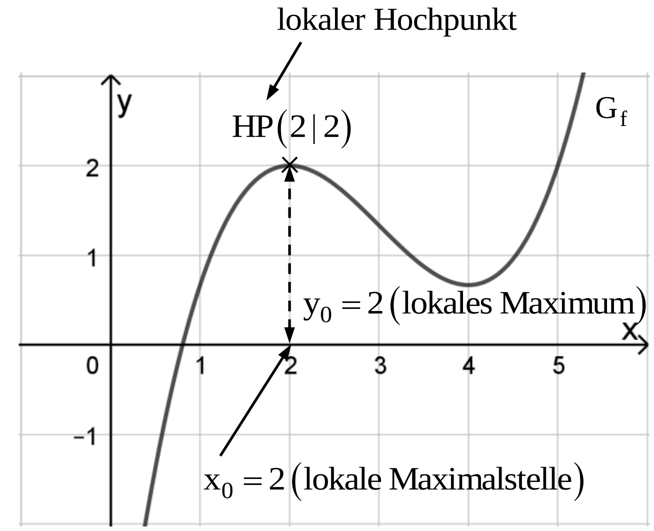


Auf Terrassenpunkte werden wir aber später noch genauer eingehen.

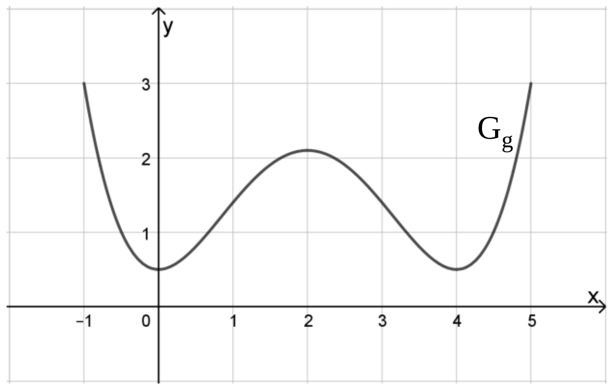
7.5 Kurvenpunkte

7.5.1 Lokale Hochpunkte (relative Hochpunkte)

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein lokales (relatives) Maximum, wenn die Funktionswerte in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 kleiner als an dieser Stelle sind.



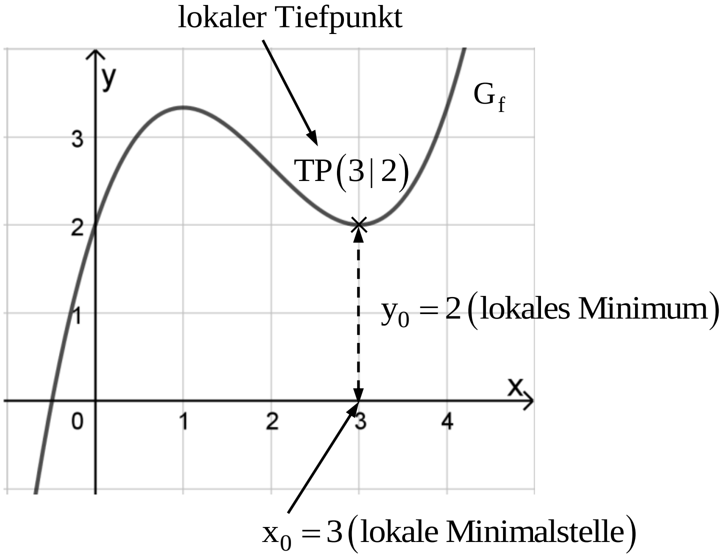
Übung:
Der Graph der Funktion g besitzt die Definitionsmenge $D_g = [-1;5]$. Zeichnen Sie sämtliche lokalen Hochpunkte ein und geben Sie deren Koordinaten an.



Bemerkung:
Befindet sich am Rand der Defintionsmenge ein lokaler Hochpunkt, so nennt man diesen auch Randhochpunkt.

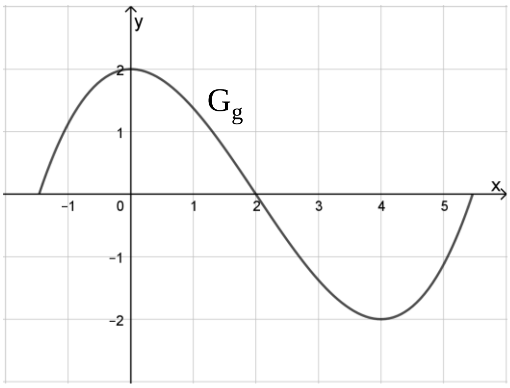
7.5.2 Lokale Tiefpunkte (relative Tiefpunkte)

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein lokales (relatives) Minimum, wenn die Funktionswerte in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 größer als an dieser Stelle sind.



Übung:

Der Graph der Funktion g besitzt die Definitionsmenge $D_g = [-1{,}5; 5{,}5]$. Zeichnen Sie sämtliche lokalen Tiefpunkte ein und geben Sie deren Koordinaten an.



Bemerkung:

Befindet sich am Rand der Defintionsmenge ein lokaler Tiefpunkt, so nennt man diesen auch Randtiefpunkt.

Und noch eine Bemerkung:

Lokale Hochpunkte bzw. lokale Tiefpunkte nennt man auch lokale Extrempunkte.

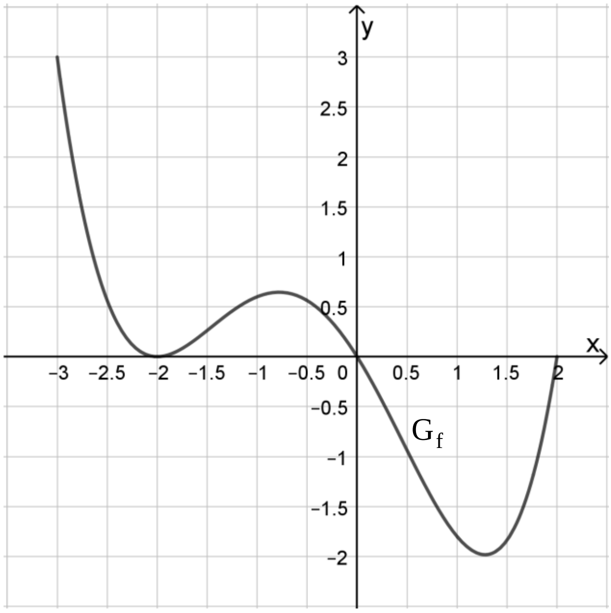
7.5.3 Globale Hoch- und Tiefpunkte (absolute Hoch- und Tiefpunkte)

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ einen globalen (absoluten) Hochpunkt, wenn es keine y-Werte gibt, die größer als $f(x_0)$ sind. Den größten y-Wert nennt man dann auch globales (absolutes) Maximum.

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ einen globalen (absolutes) Tiefpunkt, wenn es keine y-Werte gibt, die kleiner als $f(x_0)$ sind. Den kleinsten y-Wert nennt man dann auch globales (absolutes) Minimum.

Übung 1:
Der Graph der Funktion f besitzt die Definitionsmenge $D_f = [-3;2]$ und ist im rechten Koordinatensystem abgebildet.

Zeichnen Sie zunächst sämtliche lokalen Hoch- und Tiefpunkte ein und geben Sie deren Koordinaten an.
Geben Sie die Koordinaten des globalen Hochpunktes und globalen Tiefpunktes an.
Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.



Übung 2:
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x$ besitzt die Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Zeichnen Sie zunächst sämtliche lokalen Hoch- und Tiefpunkte ein und geben Sie deren Koordinaten an.
Entscheiden Sie, ob der Graph der Funktion f einen globalen Hochpunkt bzw. einen globalen Tiefpunkt besitzt.
Geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an.