

Lernen ist wie rudern gegen den Strom.
Sobald man aufhört, treibt man zurück.
(Benjamin Britten)

§ 4 Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktion ist eine Funktion der Form

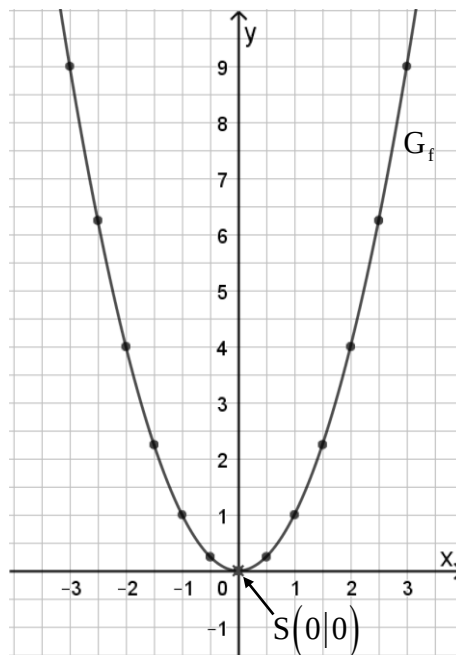
$$f : y = ax^2 + bx + c$$

Dabei gilt für die Buchstaben a , b und c , die man auch Parameter nennt: $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Wie der Graph einer quadratischen Funktion aussieht und welchen Einfluss die verschiedenen Parameter auf die Lage und die Form des Funktionsgraphen haben, wollen wir zunächst im Weiteren untersuchen. Dabei setzen wir $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ und erhalten die Normalparabel.

4.1 Die Normalparabel

Die Funktion $f : y = x^2$ ist die einfachste Funktion mit einem quadratischen Funktionsterm. Man bezeichnet sie einfach als Quadratfunktion. Um den Graphen der Funktion f zu erhalten erstellen wir zunächst eine Wertetabelle und zeichnen den Funktionsgraphen in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9



Den Graph der Quadratfunktion nennt man (für $a = \pm 1$) Normalparabel. Den tiefsten (oder auch den höchsten) Punkt der Parabel nennt man Scheitelpunkt oder einfach Scheitel. Hier hat er die Koordinaten $S(0|0)$ und befindet sich im Koordinatenursprung.

Wir untersuchen nun, welchen Einfluss eine Verschiebung, Streckung, Stauchung und Spiegelung einer Normalparabel im Koordinatensystem auf den dazugehörigen Funktionsterm hat.

4.1.1 Verschiebung in y-Richtung

Gegeben sind die Funktionen

$$f : y = x^2$$

$$g : y = x^2 + 2$$

$$h : y = x^2 - 3$$

Zeichnet man die Funktionsgraphen (Abbildung rechts), so stellt man fest:

- Der Graph der Funktion g geht durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion f um 2 Einheiten nach oben hervor.
- Der Graph der Funktion h geht durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion f um 3 Einheiten nach unten hervor.

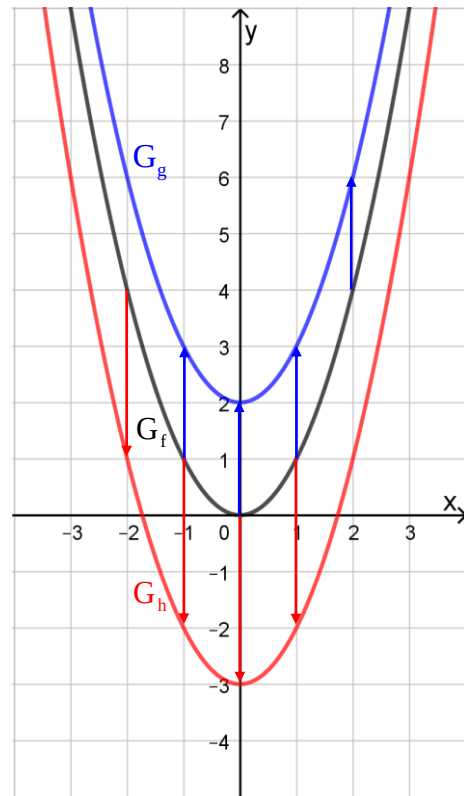
Allgemein gilt:

Der Graph der Funktion $g : y = x^2 + y_s$, $D_g = \mathbb{R}$ geht durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion $f : y = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ um y_s Einheiten in y-Richtung hervor.

Dabei erfolgt die Verschiebung für

- $y_s > 0$ nach oben,
- $y_s < 0$ nach unten.

Der Graph der Funktion g besitzt dann den Scheitel $S(0|y_s)$.



Beispiel 1: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion $g : y = x^2 + 5$, $D_g = \mathbb{R}$ aus dem Graphen der Funktion $f : y = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ hervorgeht. Geben Sie die Koordinaten des Scheitels des Graphen der Funktion g an.

Den Graphen der Funktion g erhält man, indem man den Graphen der Funktion f um 5 Einheiten nach oben verschiebt. Der Scheitel des Graphen der Funktion g ist: $S(0|5)$

Beispiel 2: Geben Sie den Funktionsterm einer Normalparabel mit dem Scheitel $S(0|-6)$ an.

Da der Scheitel 6 Einheiten unterhalb des Koordinatenursprungs liegt, also um 6 Einheiten nach unten verschoben wurde, folgt: $g : y = x^2 - 6$

4.1.2 Verschiebung in x-Richtung

Gegeben sind die Funktionen

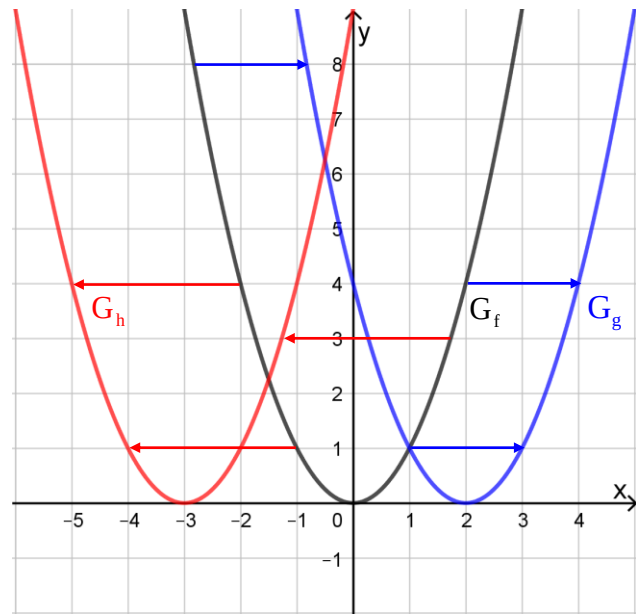
$$f : y = x^2$$

$$g : y = (x - 2)^2$$

$$h : y = (x + 3)^2$$

Zeichnet man die Funktionsgraphen (Abbildung rechts), so stellt man fest:

- Der Graph der Funktion g geht durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion f um 2 Einheiten nach rechts hervor.
- Der Graph der Funktion h geht durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion f um 3 Einheiten nach links hervor.



Allgemein gilt:

Der Graph der Funktion $g : y = (x - x_s)^2$, $D_g = \mathbb{R}$ geht durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion $f : x \mapsto x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ um x_s Einheiten in x-Richtung hervor.

Dabei erfolgt die Verschiebung für

- $x_s > 0$ nach rechts,
- $x_s < 0$ nach links.

Der Graph der Funktion g besitzt dann den Scheitel $S(x_s | 0)$.

Beispiel 3: Erklären Sie, wie der Graph der Funktion $g : y = (x + 7)^2$, $D_g = \mathbb{R}$ aus dem Graphen der Funktion $f : y = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ hervorgeht. Geben Sie die Koordinaten des Scheitels des Graphen der Funktion g an.

Den Graphen der Funktion f erhält man, indem man den Graphen der Funktion f um 7 Einheiten nach links verschiebt. Der Scheitel des Graphen der Funktion g ist: $S(-7 | 0)$

Beispiel 4: Geben Sie den Funktionsterm einer Normalparabel mit dem Scheitel $S(3 | 0)$ an.

Da der Scheitel 3 Einheiten rechts des Koordinatenursprungs liegt, also um 3 Einheiten nach rechts verschoben wurde, folgt: $g : y = (x - 3)^2$

Aufgaben:

1. Geben Sie den Funktionsterm einer (nach oben geöffneten) Normalparabel mit dem Scheitel S an.
 - a) $S(0|-2)$
 - b) $S(-2|0)$
 - c) $S(-2|-2)$
 - d) $S(3|5)$
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f : y = f(x)$. Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f aus dem Graph der Funktion $g : y = x^2$ durch Verschiebung hervorgeht. Geben Sie auch die Koordinaten des Scheitelpunktes der Funktion f an.
 - a) $f(x) = x^2 + 0,5$
 - b) $f(x) = (x + 1,5)^2$ $P_f(2|4)$
 - c) $f(x) = (x - 3)^2 - 1$

Bemerkung:

Die Reihenfolge der Verschiebung spielt keine Rolle. D.h. eine Verschiebung der Normalparabel $g : y = x^2$ um

- x_s Einheiten in x-Richtung und dann um y_s Einheiten in y-Richtung oder
- y_s Einheiten in y-Richtung und dann um x_s Einheiten in x-Richtung

liefert beide Male denselben Funktionsgraphen $f : y = (x - x_s)^2 + y_s$

4.1.3 Streckung und Stauchung

Gegeben sind die Funktionen

$$f : y = x^2$$

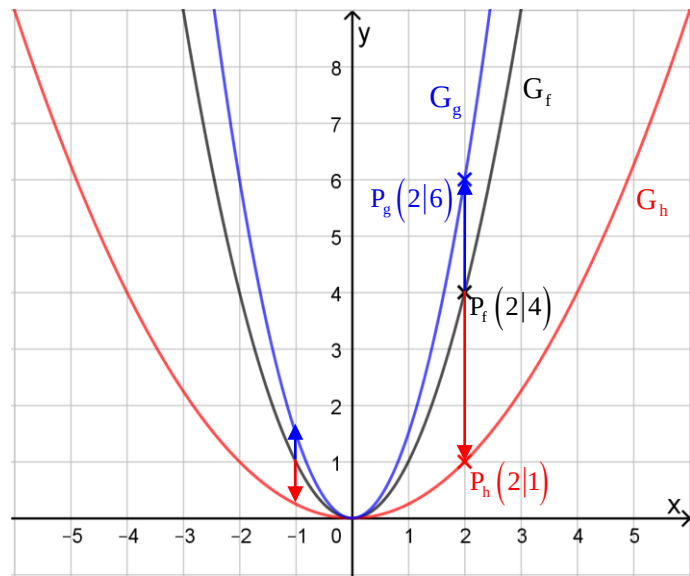
$$g : y = 1,5x^2$$

$$h : y = 0,25x^2$$

Zeichnet man die Funktionsgraphen (Abbildung rechts), so stellt man fest:

- Der Graph der Funktion g geht durch eine Streckung des Graphen der Funktion f um Faktor 1,5 in y -Richtung hervor.
- Der Graph der Funktion h geht durch eine Streckung des Graphen der Funktion f um den Faktor 0,25 in y -Richtung hervor.

Man sagt hier auch: Der Graph der Funktion h geht durch eine Stauchung des Graphen der Funktion um den Faktor 4 (Kehrwert von 0,25) hervor.



Allgemein gilt:

Der Graph der Funktion $g : y = a \cdot x^2$, $D_g = \mathbb{R}$ mit dem Formfaktor a ($a > 0$) ist für

- $a > 1$ eine Parabel, die im Vergleich zur Normalparabel in y -Richtung gestreckt
- $0 < a < 1$ eine Parabel, die im Vergleich zur Normalparabel in y -Richtung gestaucht

ist.

Aufgaben:

3. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $f : y = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, in ein Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie dann, ausgehend vom Graph der Funktion f den Graphen der Funktion

a) $g : y = 0,5 \cdot x^2$

b) $h : y = 1,75 \cdot x^2$

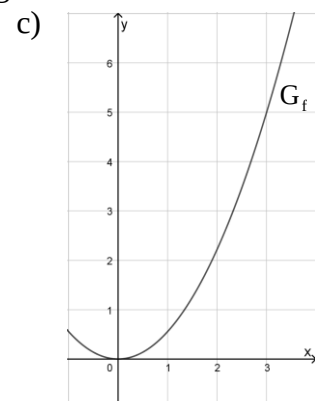
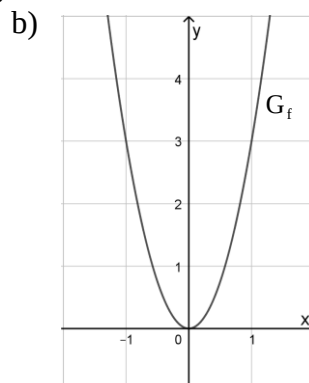
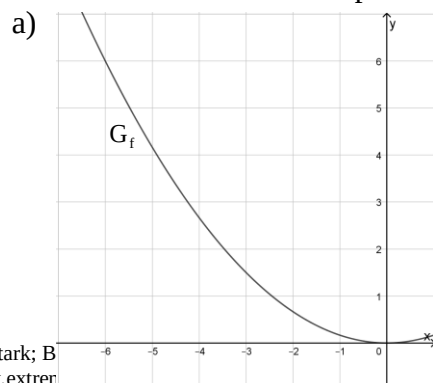
4. Gegeben ist die Funktion $f : y = a \cdot x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ mit dem Öffnungsfaktor $a \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie, für welches $a \in \mathbb{R}$ der Graph der Funktion f durch den Punkt

a) $P(2|3)$

b) $Q(-3|1)$

verläuft. Geben Sie dabei an, ob der Graph der Funktion f gegenüber der Normalparabel gestaucht oder gestreckt ist.

5. Bestimmen Sie für die Graphen folgender Funktionen einen geeigneten Funktionsterm.



4.1.4 Spiegelung an der x-Achse

Gegeben sind die Funktionen

$$f : y = x^2$$

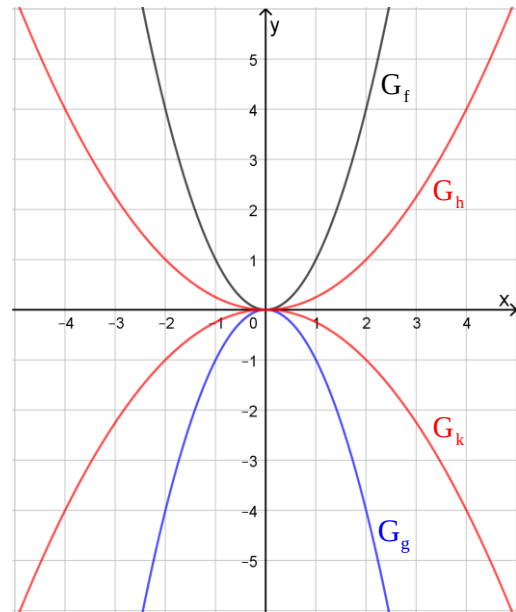
$$g : y = -x^2$$

$$h : y = 0,25x^2$$

$$k : y = -0,25x^2$$

Zeichnet man die Funktionsgraphen (Abbildung rechts), so stellt man fest:

- Der Graph der Funktion g geht durch eine Spiegelung des Graphen der Funktion f an der x-Achse hervor.
- Ein negativer Formfaktor bewirkt eine Spiegelung des Graphen an der x-Achse. Die Parabel ist dann nach unten geöffnet.



Allgemein gilt:

Der Graph der Funktion $g : y = a \cdot x^2$, $D_g = \mathbb{R}$ mit dem Formfaktor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist für

- $a > 0$ eine nach oben geöffnete Parabel
- $a < 0$ eine nach unten geöffnete Parabel.

Aufgaben:

6. Gegeben ist die Funktion $f : y = a \cdot x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ mit dem Öffnungsfaktor $a \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie, für welches $a \in \mathbb{R}$ der Graph der Funktion f durch den Punkt

a) $P(-2|-6)$

b) $Q(3|-5)$

verläuft.

Geben Sie auch an, wie der Graph der Funktion f aus der Normalparabel ($y = x^2$) entsteht.

7. Geben Sie den Funktionsterm der Funktion g an, deren Graph aus der Normalparabel ($y = x^2$) entsteht, durch eine

- Streckung um den Faktor 2 in y-Richtung, Spiegelung an der y-Achse, Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts und Verschiebung um 3 Einheiten nach unten.
- Stauchung um den Faktor 3 in y-Richtung, Verschiebung um 5 Einheiten nach links und um 1 Einheit nach oben.
- Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach oben.
- Spiegelung an der x-Achse, Streckung um den Faktor 1,5, Verschiebung um 3 Einheiten nach unten.

8. Erklären Sie, wie der Graph der Funktion f aus dem Graph der Funktion $g : y = x^2$ entsteht.

a) $f : y = (x+2)^2 - 5$

b) $f : y = -(x-4)^2 + 2$

c) $f : y = 0,5 \cdot x^2 + 2$

$$d) f : y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3$$

$$e) f : y = -1,25(x+1)^2 + 1$$

4.2 Darstellungsformen quadratischer Funktionen

4.2.1 Scheitelform

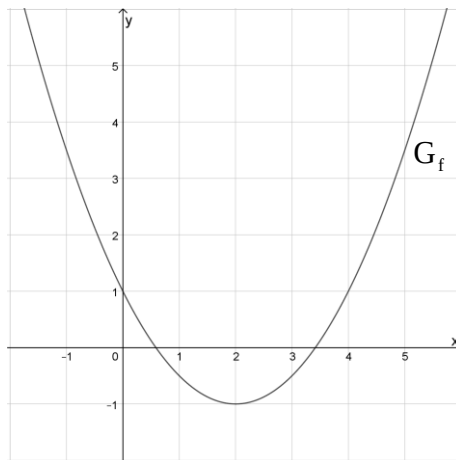
Aus der bereits verwendeten Termschreibweise des Funktionsterms lassen sich sehr gut die Koordinaten des Scheitelpunktes einer/der Parabel herauslesen. Es gilt:

Definition: Den Funktionsterm der quadratischen Funktion f mit der Gleichung

$$f : y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \text{ mit } a \neq 0$$

nennt man Scheitelform. Den Graph der quadratischen Funktion nennt man Parabel. Sie entsteht aus der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ durch Streckung/Stauchung/Spiegelung um den Faktor a und einer Verschiebung um x_s in x -Richtung und y_s in y -Richtung. Die Parabel hat dabei den Scheitel $S(x_s | y_s)$.

Beispiel 1: Gegeben ist der Graph (Parabel) der Funktion f . Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm $f(x)$.



Der Graph besitzt den Scheitel $S(2 | -1)$. Somit folgt: $f : y = a \cdot (x - 2)^2 - 1$. Denn Öffnungsfaktor (auch Formfaktor) der Parabel erhält man, in dem man sich einen zweiten Punkt im Koordinatensystem sucht, der auf der Parabel liegt. Wählen wir den Punkt $P(4 | 1)$, so folgt:

$$f(4) = 1$$

$$a \cdot (4 - 2)^2 - 1 = 1 \quad | +1$$

$$a \cdot 2^2 = 2$$

$$4a = 2 \quad | :4$$

$$a = \frac{1}{2}$$

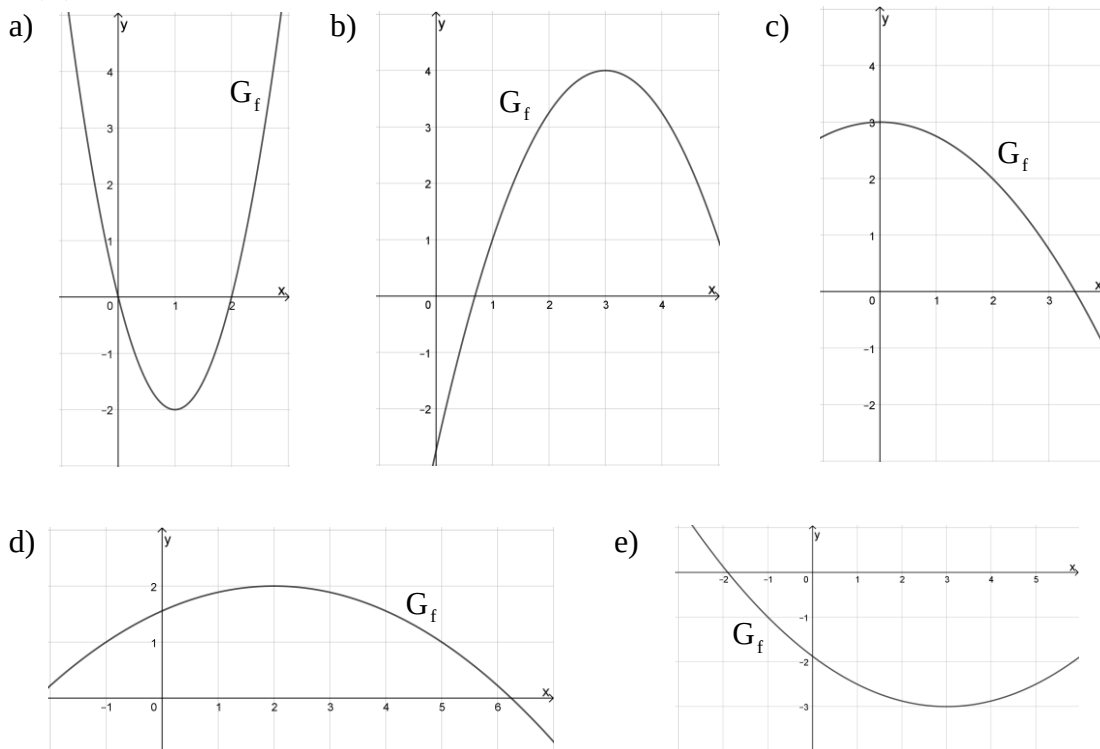
Somit folgt: $f : y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1$

Man hätte statt des Punktes $P(4|1)$ auch den Punkt $Q(0|1)$ nutzen können um den Wert des Formfaktors a zu bestimmen. Die Punkte P und Q liegen nämlich symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 2$.

Bemerkung: Die Parabel ist symmetrisch zu einer senkrechten Geraden durch den Scheitelpunkt. Die Symmetrieachse hat die Gleichung $x = x_s$.

Aufgaben:

9. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionsgraphen den dazugehörigen Funktionsterm $f(x)$.



10. Geben Sie die Koordinaten des Scheitels an

a) $f: y = -\frac{2}{3}(x+5)^2 - 1$

b) $f: y = 8(x+8)^2 + 8$

c) $f: y = -9(x-9)^2 - 9$

11. Gegeben sind die lineare Funktion $g: y = -\frac{4}{3}x + 8$ und eine quadratische Funktion p mit $D_g = D_f = \mathbb{R}$. Die beiden Schnittpunkte der Geraden G_g mit den Achsen des Koordinatensystems liegen auf der Parabel G_p . Einer dieser Punkte ist dabei zugleich Scheitelpunkt der Parabel G_p . Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung $y = p(x)$ der quadratischen Funktion p .

4.2.2 Normalform

Ist die quadratische Funktion $f : y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$ in Scheitelform gegeben, so lässt sich die rechte Seite der Gleichung durch „Auflösen“ der Klammer wie folgt umformen:

$$y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) - 2$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 - 2$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$$

Die so erhaltene Form des Funktionsterms nennt man dann die Normalform der (quadratischen) Funktion f .

Definition: Den Funktionsterm der quadratischen Funktion f mit der Gleichung

$$f : y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad \text{mit } a \neq 0$$

nennt man Normalform.

Dabei gilt für die Scheitelstelle x_s des Scheitels: $x_s = -\frac{b}{2a}$

Den Scheitelwert y_s des Scheitels erhält man mit der Funktionsgleichung: $y_s = f(x_s)$

Beispiel 2: Gegeben ist die quadratische Funktion $f : y = -2x^2 + 8x - 6$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels S der Parabel G_f und geben Sie auch die Scheitelform der Funktion f an.

$$\text{Es gilt: } x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = -\frac{8}{-4} = 2$$

$$y_s = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6 = 2$$

Somit folgt: $S(2|2)$

Für die Scheitelform folgt dann: $f : y = -2 \cdot (x-2)^2 + 2$

Hinweis: Der Öffnungsfaktor a der Parabel kann dabei der Normalform entnommen werden!

Aufgaben:

12. Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S der quadratischen Funktion f und geben Sie den Funktionsterm in Scheitelform an.

a) $f : y = 3x^2 - 6x + 1$

b) $f : y = 2x^2 - x - 2$

c) $f : y = \frac{1}{3}x^2 + 3x$

d) $f : y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$

e) $f : y = \frac{3}{4}x^2 + 1$

f) $f : y = -x^2 + x$

4.2.3 Nullstellen und Nullstellenform

Der quadratische Term lässt sich nur dann in Nullstellenform bringen, wenn die quadratische Funktion Nullstellen besitzt und man diese auch kennt.

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion $f : y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, mit $a \neq 0$, erhält man mit der Mitternachtsformel (Lösungsformel).

Für die Nullstellen gilt: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Den Term $D = b^2 - 4ac$ nennt man die Diskriminanten. Dabei gilt:
Die quadratische Funktion f hat für:

$D > 0$	zwei Nullstellen
$D = 0$	eine Nullstelle
$D < 0$	keine Nullstelle

Definition: Hat eine quadratische Funktion $f : y = ax^2 + bx + c$ die Nullstellen x_1 und x_2 , dann lässt sich der Funktionsterm in Nullstellenform darstellen. Für diese gilt:

$$f : y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Beispiel 3: Gegeben ist die quadratische Funktion $f : y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie den Funktionsterm in Nullstellenform an.

Für die Nullstellen gilt:

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Dann folgt für die Nullstellen form: $f : y = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

Beispiel 4: Gegeben ist die quadratische Funktion $f : y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie den Funktionsterm in Nullstellenform an.

Für die Nullstellen gilt:

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-2 \pm 0}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Dann folgt für die Nullstellen form: $f : y = -\frac{1}{3} \cdot (x - 3) \cdot (x - 3)$

Das lässt sich dann auch in der Form $f : y = -\frac{1}{3} \cdot (x - 3)^2$ schreiben.

Aufgaben:

13. Gegeben ist die quadratische Funktion f . Stellen Sie, falls möglich, den Funktionsterm in Nullstellenform dar.

- a) $f : y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1,5$
- b) $f : y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1\frac{2}{3}$
- c) $f : y = -x^2 - 4x$
- d) $f : y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$
- e) $f : y = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{4}$
- f) $f : y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$
- g) $f : y = \frac{1}{3}(x+3)^2 + 1$

14. Gegeben ist die quadratische Funktion f . Bestimmen Sie den Scheitel des Graphen der Funktion f . Bestimmen Sie, falls möglich, die Nullstellen der Funktion f und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Geben Sie den Funktionsterm in Normalenform, Scheitelform und falls möglich in Nullstellenform an.

- a) $f : y = x^2 + 2x - 3$
- b) $f : y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 2\frac{1}{4}$
- c) $f : y = -\frac{1}{4}(x-4) \cdot (x+6)$
- e) $f : y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$
- f) $f : y = -\frac{2}{5}(x-5)^2 - 5$
- g) $f : y = \frac{5}{9}x(x-6)$

Bemerkung: Bei einer Parabel mit den Nullstellen x_1 und x_2 gilt für die Scheitelstelle:

$$x_s = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$$

Die Scheitelstelle liegt also in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.

15. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der quadratischen Funktion f so, dass der Graph die gegebenen Eigenschaften besitzt.

- a) Die Parabel besitzt die Nullstellen -2 und 6 und verläuft durch den Punkt $P(1|-1)$.
- b) Die Parabel besitzt die Nullstellen 3 und 6 und schneidet die y -Achse bei -3 .
- c) Die Parabel besitzt nur die Nullstelle 2 und verläuft durch den Punkt $P(-1|2)$.
- d) Die Parabel hat den Scheitel $S(2|1)$ und verläuft durch den Koordinatenursprung.
- e) Der Scheitel der Parabel liegt auf der x -Achse, hat die Scheitelstelle $x_s = -3$ und verläuft durch den Punkt $P(2|3)$.
- f) Die Parabel besitzt eine Nullstelle bei $x_1 = 5$ und hat die Scheitelstelle $x_s = 1$. Sie schneidet die y -Achse bei -2 .

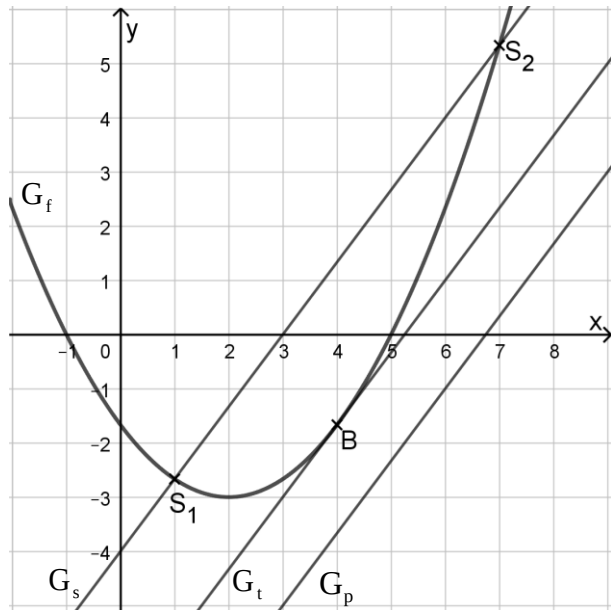
16. Der aus der Wasserdüse eines Gartenschlauchs austretende Wasserstrahl beschreibt eine Kurve, die sich durch die Funktionsgleichung $f : y = -\frac{1}{20}(x-10)^2 + 6$ beschreiben lässt.
- a) Bestimmen Sie, in welcher Höhe der Wasserstrahl aus dem Gartenschlauch austritt.
 - b) Ermitteln Sie, in welcher Entfernung der Wasserstrahl auf dem Boden auftritt.
 - c) Geben Sie nun die Definitionsmenge der Funktion f an.
 - d) Geben Sie die maximale Höhe an, die der Wasserstrahl erreicht.
17. Eine Firma stellt einen Elektroartikel her. Bei einer Marktanalyse wurde festgestellt, dass sich der monatliche Gewinn (in €) mit diesem Artikel in Abhängigkeit vom Verkaufspreis x (in €) durch die Funktion $f : y = -90 \cdot x^2 + 9000 \cdot x - 189000$ beschreiben lässt.
- a) Ermitteln Sie, welchen Gewinn die Firma bei einem Verkaufspreis von 59 € und welchen sie bei 72 € erzielen.
 - b) Bestimmen Sie, bei welchem Verkaufspreis die Firma maximalen Gewinne macht. Wie groß ist der Gewinn dann?
 - c) Ermitteln Sie für welchen Verkaufspreis die Firma weder einen Gewinn, noch einen Verlust macht. (Break-even-Punkte).

4.3 Schnittpunkte bei Parabeln

4.3.1 Schnittpunkte einer Geraden mit einer Parabel

Eine Gerade kann mit einer Parabel G_f

- zwei Schnittpunkte besitzen. Die Gerade G_s nennt man in diesem Fall dann eine Sekante.
- einen Schnittpunkt besitzen. Die Gerade G_t nennt man in diesem Fall dann eine Tangente. Den (einzigen) Schnittpunkt nennt man dann auch Berührungspunkt.
- Keinen Schnittpunkt besitzen. Die Gerade G_p nennt man dann eine Passante.



Sollen die Funktionsgraphen zweier Funktionen f und g hinsichtlich ihrer Schnittmenge untersucht werden, so hat man die Gleichung

$$f(x) = g(x)$$

zu lösen. Die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung entspricht dabei auch gleich der Anzahl der Schnittpunkte.

Man erhält dabei eine quadratische Gleichung. Zwischen der Diskriminante der quadratischen Gleichung und der Anzahl der Schnittpunkte der zugehörigen Funktionsgraphen gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} D > 0 &\Rightarrow 2 \text{ Schnittpunkte} \\ D = 0 &\Rightarrow 1 \text{ Schnittpunkt } (\hat{=} \text{ Berührungspunkt}) \\ D < 0 &\Rightarrow \text{keinen Schnittpunkt} \end{aligned}$$

Beispiel 1: Gegeben sind die Funktionen $f: y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ und $g: y = 1,5x + 6$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 &= 1,5x + 6 \\ -\frac{1}{2}x^2 - 2,5x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = \frac{2,5 \pm \sqrt{(-2,5)^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{2,5 \pm \sqrt{2,25}}{-1} = \frac{2,5 \pm 1,5}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in g (oder in f) ein, so erhält man:

$$g(-4) = 1,5 \cdot (-4) + 6 = 0 \Rightarrow S_1(-4|0)$$

$$g(-1) = 1,5 \cdot (-1) + 6 = 4,5 \Rightarrow S_2(-1|4,5)$$

Bemerkung: Da für die Diskriminanten gilt $D = 2,25 > 0$ hat die quadratische Gleichung zwei Lösungen und die beiden Funktionsgraphen somit zwei Schnittpunkte.

Die Gerade G_g ist in diesem Beispiel eine Sekante.

Beispiel 2: Gegeben sind die Funktionen $f: y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ und $g: y = -2x + 4,5$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes der beiden Funktionsgraphen.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 &= -2x + 4,5 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x - 0,5 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-0,5)}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{1 \pm \sqrt{0}}{-1} = \frac{1 \pm 0}{-1} \Rightarrow x_1 = -1$$

Setzt man diesen Werte in g (oder in f) ein, so erhält man:

$$g(-1) = -2 \cdot (-1) + 4,5 = 6,5 \Rightarrow B(-1|6,5)$$

Bemerkung: Da für die Diskriminanten gilt $D = 0$ hat die quadratische Gleichung nur eine Lösung und die beiden Funktionsgraphen somit einen Berührungspunkt.

Die Gerade G_g ist in diesem Beispiel eine Tangente.

Beispiel 3: Gegeben sind die Funktionen $f: y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ und $g: y = -\frac{1}{3}x + 5$. Zeigen Sie, dass die beiden Funktionsgraphen keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 &= -\frac{1}{3}x + 5 \\ -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{(\frac{2}{3})^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{1 \pm \sqrt{-\frac{14}{9}}}{-1} \quad \text{n.d.}$$

Da für die Diskriminanten gilt $D = -\frac{14}{9} < 0$ hat die quadratische Gleichung somit keine Lösung und die beiden Funktionsgraphen somit keinen Schnittpunkt.

Die Gerade G_g ist in diesem Beispiel eine Passante.

Aufgaben

18. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte (falls vorhanden!) der Graphen folgender Funktionen:

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| a) $f : y = 3x^2 + 5x - 2$ | $g : y = x + 2$ |
| b) $f : y = x^2 - 2x + 1$ | $g : y = x - 2$ |
| c) $f : y = x^2 - 2x + 1$ | $g : y = x + 5$ |
| d) $f : y = 4x + 6$ | $g : y = x^2 + 3x + 4$ |

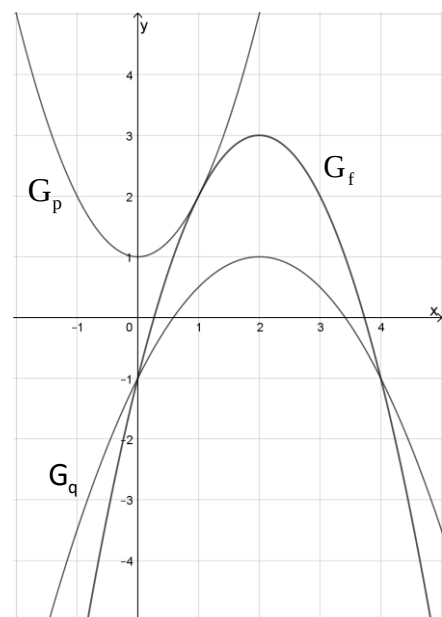
19. Entscheiden Sie für welche Werte $k \in \mathbb{R}$ die Graphen der Funktionen f und g einen Berührungspunkt besitzen.

- | | |
|---------------------------------------|-------------------|
| a) $f : y = x^2 - 2x + k$ | $g : y = 3x + 4$ |
| b) $f : y = kx^2 + 3x - 2$ | $g : y = x - 2$ |
| c) $f : y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ | $g : y = kx - 1$ |
| d) $f : y = 3x^2 - 4x + 2$ | $g : y = -2x + k$ |
| e) $f : y = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + k$ | $g : y = -kx$ |

4.3.2 Schnittpunkte einer Parabel mit einer Parabel

Eine Parabel kann mit einer anderen Parabel

- zwei Schnittpunkte besitzen.
- einen Schnittpunkt besitzen. Den (einzigen) Schnittpunkt nennt man dann auch Berührungspunkt.
- keinen Schnittpunkt besitzen.



Beispiel 1: Gegeben sind die Funktionen $f : y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ und $g : y = -x^2 + 4x - 1$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 &= -x^2 + 4x - 1 \\
 \frac{1}{2}x^2 - 2x &= 0
 \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{1} = \frac{2 \pm 2}{1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in g (oder in f) ein, so erhält man:

$$g(4) = -4^2 + 4 \cdot 4 - 1 = -1 \Rightarrow S_1(4|-1)$$

$$g(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow S_2(0|-1)$$

Bemerkung: Da für die Diskriminanten gilt $D = 4 > 0$ hat die quadratische Gleichung zwei Lösungen und die beiden Funktionsgraphen somit zwei Schnittpunkte.

Beispiel 2: Gegeben sind die Funktionen $f : y = -x^2 + 4x - 1$ und $g : y = x^2 + 1$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes der beiden Funktionsgraphen.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -x^2 + 4x - 1 &= x^2 + 1 \\ -2x^2 + 4x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-4} = \frac{-4 \pm 0}{-4} \Rightarrow x_1 = 1$$

$$-2x^2 + 4x - 2 = 0$$

Setzt man diesen Werte in g (oder in f) ein, so erhält man:

$$g(1) = 1^2 + 1 = 2 \Rightarrow B(1|2)$$

Bemerkung: Da für die Diskriminanten gilt $D = 0$ hat die quadratische Gleichung nur eine Lösung und die beiden Funktionsgraphen somit einen Berührungspunkt.

Beispiel 3: Gegeben sind die Funktionen $f : y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ und $g : y = x^2 + 1$. Zeigen Sie, dass die beiden Funktionsgraphen keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 &= x^2 + 1 \\ -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-\frac{3}{2})} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{-3} \quad \text{n.d.}$$

Da für die Diskriminanten gilt $D = -8 < 0$ hat die quadratische Gleichung somit keine Lösung und die beiden Funktionsgraphen somit keinen Schnittpunkt.

Aufgaben

20. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen folgender Funktionen

a) $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 2$ $g : x \mapsto 2x^2 + 6x - 2$

b) $f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$ $g : x \mapsto x^2 + 3x - 5$

c) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ $g : x \mapsto x^2 + 3x + 4$

d) $f : x \mapsto 2x^2 + 5x + 7$ $g : x \mapsto x^2 - 4x - 1$

21. Entscheiden Sie für welche Werte $k \in \mathbb{R}$ die Graphen der Funktionen f und g einen Berührungspunkt besitzen.

a) $f : y = x^2 - 2x + k$ $g : y = -x^2 + x$

b) $f : y = kx^2 + 3x - 2$ $g : y = x^2 - 2x + 2$

c) $f : y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ $g : y = -\frac{1}{2}x^2 + kx - 2$

d) $f : y = 3x^2 - 4x + 2$ $g : y = 2x^2 - 2x + k$

e) $f : y = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ $g : y = x^2 - kx + 2$

4.4 Lösen von Ungleichungen

In späteren Aufgabenstellungen wird es wichtig sein, Intervalle zu bestimmen, in welchen der Funktionsterm ein positives bzw. negatives Vorzeichen besitzt.

Graphisch gesehen ist das gleichbedeutend mit der Lage des Graphen einer Funktion bezüglich der x-Achse. Also konkret, verläuft der Graph ober- oder unterhalb der x-Achse. Lineare Ungleichungen lassen sich zum Glück durch Äquivalenzumformungen sehr gut lösen.

4.4.1 Lösen linearer Ungleichungen

Beispiel 1: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{2}x - 3 > 0$

Rechnerische Lösung: Diese Ungleichung lässt sich folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x - 3 &> 0 & | +3 \\ \frac{1}{2}x &> 3 & | : \frac{1}{2} \\ x &> 6\end{aligned}$$

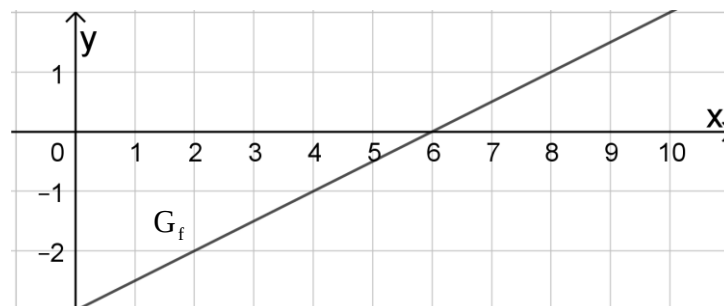
Somit folgt für die Lösungsmenge: $L =]6; \infty[$

Graphische Lösung: Die graphische Lösung ist in diesem Fall zwar etwas aufwendiger als die rechnerische Lösung, aber in Hinblick auf spätere Aufgabenstellungen der Schlüssel dazu, um auch quadratische Ungleichungen oder allgemein Ungleichungen lösen zu können

Dabei geht man folgendermaßen vor: Man ersetzt zunächst das Ungleichheitszeichen durch ein Gleichheitszeichen und löst die entsprechende Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x - 3 &= 0 & | +3 \\ \frac{1}{2}x &= 3 & | : \frac{1}{2} \\ x &= 6\end{aligned}$$

Nun fasst man den Term auf der linken Seite der Gleichung (oder Ungleichung) als Funktion $f : y = \frac{1}{2}x - 3$ und erstellt eine Skizze mit dem Verlauf des Graphen dieser Funktion f und der oben berechneten Nullstelle.



Die Lösungsmenge oder der Lösungsbereich der Ungleichung $\frac{1}{2}x - 3 > 0$ lässt sich nun mithilfe der Skizze sehr gut ablesen. Soll nämlich gelten, dass $\frac{1}{2}x - 3 > 0$, so muss der Term $\frac{1}{2}x - 3$ ein positives Vorzeichen besitzen. Das heißt, dass der Graph der Funktion f oberhalb der x-Achse liegen muss. Also folgt: $L =]6; \infty[$

4.4.2 Lösen quadratischer Ungleichungen

Das Lösungsverfahren zum Lösen quadratischer Ungleichungen wird an folgendem Beispiel verdeutlicht.

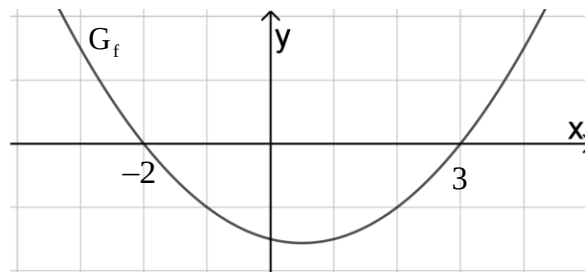
Beispiel 2: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$

Man löst zunächst die quadratische Gleichung:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-(-\frac{1}{2}) \pm \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{6,25}}{1} = \frac{1}{2} \pm 2,5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Nun skizziert man den Graph der Funktion $f: y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$ und nutzt dabei die Kenntnis der beiden Nullstellen. (Hinweis: Eine exakte Skalierung der Achsen ist dabei nicht notwendig; die y-Achse muss nicht skaliert werden; auf der x-Achse reicht es, wenn man die Nullstellen einzeichnet).



Der Graphik lässt sich nun die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$ entnehmen:

$$L =]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$$

Aufgaben:

22. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen

- a) $3x^2 + 24x + 21 < 0$
- b) $0,5x^2 + 5,5 > 6x$
- c) $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} < 0$
- d) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \geq 0$
- e) $\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{2} \leq 0$
- f) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2} < 0$
- g) $-3x^2 + 3x + \frac{3}{2} > 0$
- h) $x^2 - 2x - 15 \geq 0$
- i) $x^2 + 11x + 30 \leq 0$