§ 10 Statistik

10.1 Wahrscheinlichkeitsfunktion und Histogramm

Bei der Auswertung von Zufallsexperimenten ist oft gar nicht das einzelne Ergebnis von Interesse, sondern vielmehr eine Zahlengröße (Zufallsgröße X), die das Ergebnis des Experiments der Fragestellung entsprechend charakterisiert.

Bsp. 1: “Werfen zweier Würfel“

Ergebnisraum: $\{(1;1),(1;2),(1;3),...\}$ Definitionsmenge

$X:$ Augensumme ($\hat{=}$ Zufallsgröße) Funktion

Zufallswert: $\{2;3;4;...;11;12\}$ Wertemenge

Schreibweise: $P(X=x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsgröße X den Zufallswert x annimmt.

Die zu den Zufallswerten x gehörigen Wahrscheinlichkeiten fasst man in einer Tabelle zusammen:

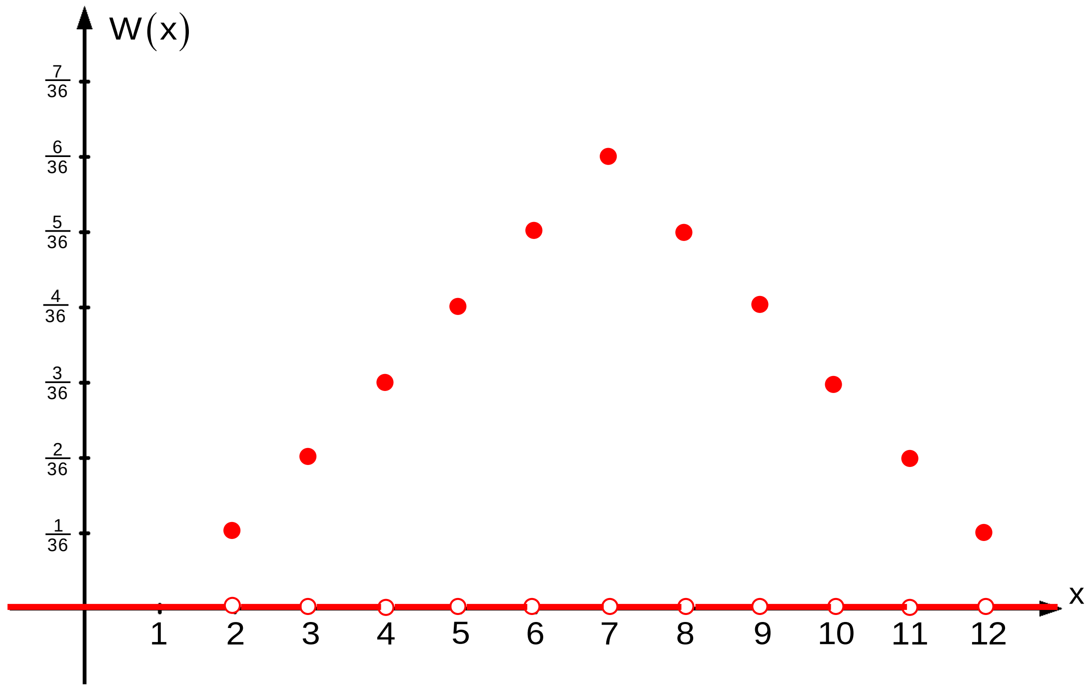
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Durch diese Wertetabelle lässt sich auf ganz $\mathbb{R}$ eine Funktion W definieren, nämlich:

$$W: x \mapsto P(X=x) \text{ mit } D_W = \mathbb{R},$$

deren Wertemenge dem Intervall $[0;1]$ angehört.

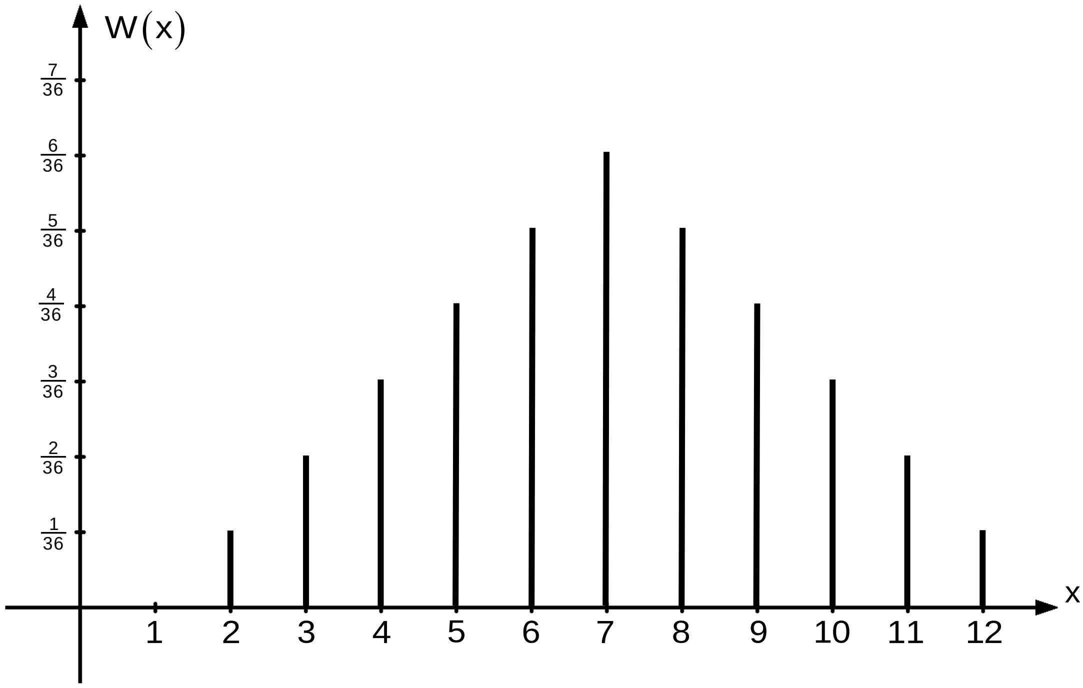
Diese Funktion heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion W der Zufallsgröße X.



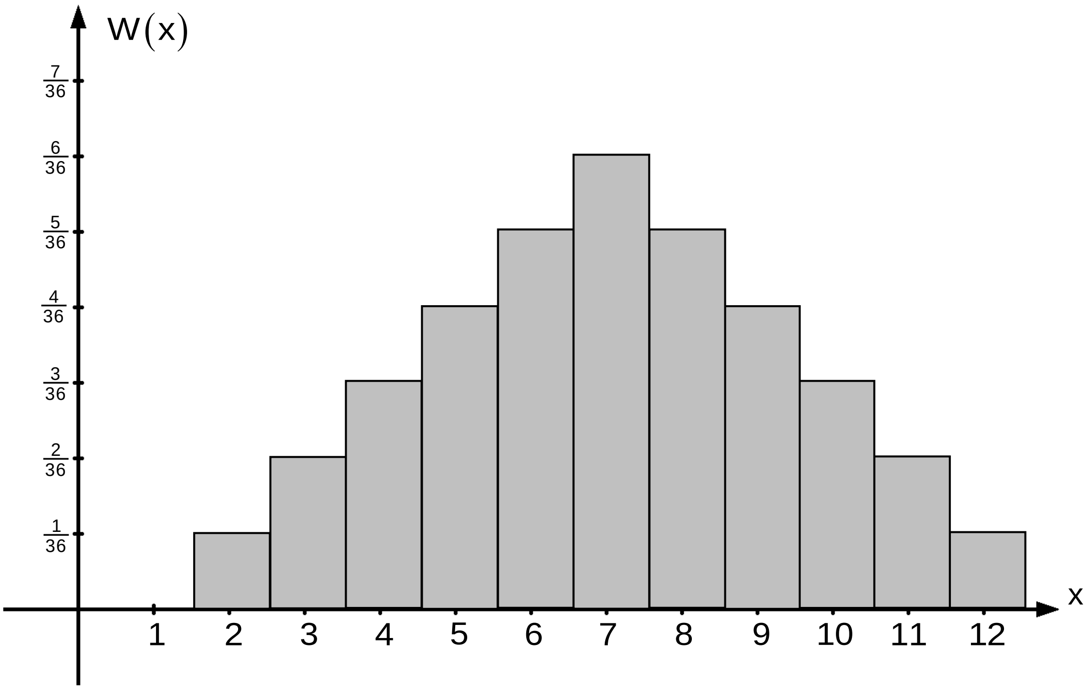
Die so definierte Wahrscheinlichkeitsfunktion W hat meist den Wert 0, weil für alle x, die nicht als Werte der Zufallsgröße X auftreten, $W(x)=0$ ist.

Man nennt W auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.
Da der Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion optisch recht „dürftig“ ist, wählt man in der Praxis andere Arten der Veranschaulichung:

Stabdiagramm



Säulendiagramm (Histogramm)



Bemerkung: Der Flächeninhalt der Rechtecke im Histogramm muss der Wahrscheinlichkeit $W(x)$ der einzelnen Zufallswerte entsprechen.

Aufgaben:

1. **(NT12 2018 S I)** Seit dem 01.05.2014 werden Häuser in 9 verschiedene Energieeffizienzklassen eingeteilt, hier mit 1 bis 9 bezeichnet. Die Zufallsgröße X gibt die Effizienzklasse eines zufällig ausgewählten Einfamilienhauses an. Mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	0,01	0,15	a	0,14	0,1	0,1	0,05	0,03	0,02

Berechnen Sie zunächst den Wert für den Parameter a und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.

2. **(NT12 2013 S II)** Eine Agentur vertreibt Tickets für verschiedene Veranstaltungen. Für eine Ticketbestellung fallen Zusatzkosten (Vorverkaufsgebühr und Porto/Versand) in € gemäß folgender Tabelle an:

Vorverkaufsgebühr	5	4	3	2	3	2	2
Porto/Versand	2	2	2	2	0	1	0
Kundenanteil in %	5	20	25	10	15	5	20

Die Zufallsgröße X gibt die Zusatzkosten einer zufällig herausgegriffenen Bestellung an. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabellenform an und stellen Sie sie in Form eines Histogramms grafisch dar.

3. **(NT12 2013 S I)** Beim Buchen eines Fluges wird in der Touristenklasse Gepäck bis maximal 20 kg pro Fluggast kostenlos befördert. Für je 2 angefangene kg, die über 20 kg hinausgehen, wird eine Gebühr von 12 € verlangt. Folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten für die Gewichtsverteilung der Gepäckstücke in kg an:

Gewicht m	≤ 20	$20 < m \le 22$	$22 < m \le 24$	$24 < m \le 26$	$26 < m \le 28$
Wahrsch.	0,7	0,05	0,12	0,08	0,05

Die Zufallsgröße X gibt die anfallenden Gepäckkosten pro Person an. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in tabellarischer Form und geeignet grafisch dar.

4. Beim Zufallsexperiment: „6-maliges Werfen eines Würfels“ gibt die Zufallsgröße X die Anzahl der geworfenen 6 an. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.

10.2 Erwartungswert

Wie viele Treffer „Sechser“ erwartet man eigentlich beim 6-maligen Werfen eines Würfels?

Definition: Sei X eine Zufallsgröße, die ihre Zufallswerte $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $W(x_1), W(x_2), W(x_3), ..., W(x_n)$ annimmt, dann heißt:

$$\boxed{\mu = E(X) = x_1 \cdot W(x_1) + x_2 \cdot W(x_2) + x_3 \cdot W(x_3) + ... + x_n \cdot W(x_n)}$$

der Erwartungswert der Zufallsgröße X.

Das Tafelwerk liefert folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeitsfunktion) für das Zufallsexperiment „6-mailges Werfen eines Würfels“. Die Zufallsgröße ist dabei die Anzahl der geworfenen 6-er.

Zufallswerte x	0	1	2	3	4	5	6
$W(x) = P_{\frac{1}{6}}^{6}(X = x)$	0,33490	0,40188	0,20094	0,05358	0,00804	0,00064	0,00002

$$\mu = E(X) = 0 \cdot 0,33490 + 1 \cdot 0,40188 + 2 \cdot 0,20094 + 3 \cdot 0,05358 + 4 \cdot 0,00804 + \\ + 5 \cdot 0,00064 + 6 \cdot 0,00002 = 0,99998 \approx 1 \left(\text{von Rundungsfehlern abgesehen}\right)$$

Der Erwartungswert $\mu = E(X) = 1$ sagt nun aus, dass man 1-nen Treffer erwartet.

Bsp. 1: Eine Münze wird dreimal geworfen. Zufallsgröße sei jeweils die Anzahl von „W“. Erstellen Sie die Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung und berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße.

Wertetabelle:

x	0	1	2	3
$W(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Bsp 2: In einer Lostrommel befinden sich 4 rote und 6 weiße Kugeln, von denen 5 Stück mit Zurücklegen gezogen werden. Zufallsgröße sei die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln. Erstellen Sie die Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung und berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße.

x	0	1	2	3	4	5
$W(x)$	0,01024	0,07680	0,23040	0,34560	0,25920	0,07776

Aufgaben

5.0 **(NT12 2005 S I)**Bei entsprechenden, vom Zufall abhängigen Voraussetzungen wird die Öffnungszeit eines Parks verlängert. Die Zufallsgröße Y gibt die Verlängerung der Öffnungszeiten in Stunden an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich mit Hilfe eines Parameters $a \in \mathbb{R}$ so darstellen:

y	0	1	1,5	2
$P(Y = y)$	0,4	1,5a	a	0,5a

5.1 Berechnen Sie den Parameter a und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y geeignet graphisch dar.

5.2 Ermitteln Sie, wie lange der Park durchschnittlich länger geöffnet hat.

6.0 **(NT12 2003 S I)**Bei der Untersuchung von Kiefernadeln wird die Länge L von 200 zufällig ausgewählten Nadeln bestimmt und in sechs Längengruppen eingeteilt. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer der jeweiligen Längengruppe an. Dabei ergibt sich folgende Verteilung mit $a; b \in \mathbb{N}$:

L in mm	$L \le 40$	$40 < L \le 44$	$44 < L \le 48$	$48 < L \le 52$	$52 < L \le 56$	$L > 56$
Längengruppe	1	2	3	4	5	6
Anzahl	8	a	2a	90	b	12

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Nadel in einer der Längengruppe 4 bis 6 liegt, beträgt 0,66.

6.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b. Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm.

6.2 Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

7.0 **(NT12 2000 S II)** Der Boden eines Badezimmers wird gefliest. Erfahrungsgemäß können auf einer gefliesten Fläche von der Größe dieses Sanitärraums innerhalb des ersten Jahres nach Verlegung der betreffenden Fliesensorte insgesamt höchstens fünf Risse auftreten. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Risse in den Fliesen des Badezimmers an, die in diesem Zeitraum entstehen. Mit geeigneten Werten von a und b (a, b $\in [0;1]$) lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X wie folgt darstellen:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	a	0,25	3b	0,1	b	0,05

7.1 Berechnen Sie a und b unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens zwei Risse auftreten, 0,8 beträgt.

(Ergebnis: a = 0,4; b = 0,05)

7.2 Berechnen Sie den Erwartungswert und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang.

8. **(NT 2014 S I)** Das Monatsgehalt eines Nachwuchs-Models kann als Zufallsgröße mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden:

y in €	1.000	2.000	4.000	10.000	12.000
$P(Y = y)$	0,15	0,3	0,4	0,1	0,05

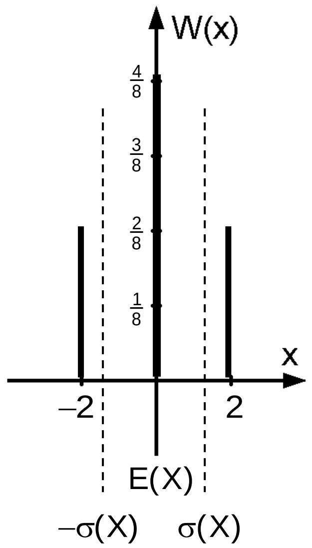
Entscheiden Sie, ob das Model mit einem festen Monatsgehalt von 3.540 € auf lange Sicht mehr verdienen würde.

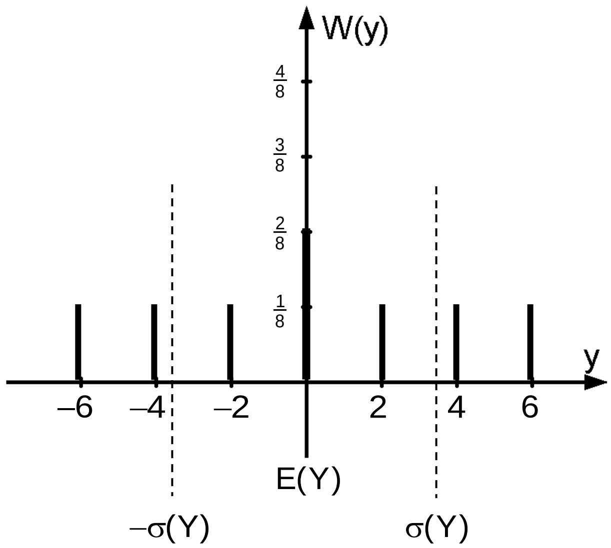
10.3 Varianz und Standardabweichung

Seien X und Y Zufallsgrößen mit folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

x	-2	0	2
W(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

y	-6	-4	-2	0	2	4	6
W(y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$





Für die beiden Erwartungswerte gilt: $E(X) = 0 = E(Y)$

Obwohl beide Wahrscheinlichkeitsverteilungen denselben Erwartungswert haben unterscheiden sich die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen wesentlich.
Die Werte der Zufallsgröße Y schwanken stärker als die von X.
Man sagt: Y besitzt eine größere Streuung um den Erwartungswert als X.

Eine Information über die Streuung der Werte um den Erwartungswert liefert die Varianz bzw. die Standardabweichung.

<u>Definition</u>: (Varianz)
Sei X eine Zufallsgröße, die ihre Zufallswerte $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $W(x_1), W(x_2), W(x_3), ..., W(x_n)$ annimmt und sei $E(X) = \mu$ der Erwartungswert der Zufallsgröße, dann heißt

$$\boxed{\operatorname{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot W(x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot W(x_2) + ... + (x_n - \mu)^2 \cdot W(x_n)}$$

die Varianz von X. Sie wird auch mittlere quadratische Abweichung genannt und mit $\sigma^2(X)$ bezeichnet.

Da die Maßeinheit für die Varianz das Quadrat der Einheit ist, in der die Zufallsgröße X gemessen wird, empfiehlt sich daher folgende

<u>Definition</u>: (Standardabweichung)
Als Standardabweichung (auch Streuung) der Zufallsgröße X bezeichnet man die Zahl

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

Sie wird auch mittlere Abweichung genannt.

Die Standardabweichung ist ein Maß dafür, wie weit die einzelnen Zufallsgrößen verteilt sind. Genauer gesagt, gibt sie an, wie weit die einzelnen Zufallswerte im Durchschnitt von dem Erwartungswert (Mittelwert) entfernt sind.

Berechnen Sie nun die Varianz bzw. die Standardabweichung der Zufallsgrößen X bzw. Y.

$$\mathrm{Var}(X)=\ldots=2 \Rightarrow \sigma(X)=\sqrt{2}\approx 1{,}4$$
$$\mathrm{Var}(Y)=\ldots=14 \Rightarrow \sigma(Y)=\sqrt{14}\approx 3{,}7$$

Um die Varianz eines Zufallsexperiments zu ermitteln gibt es aber auch eine etwas einfachere Berechnungsmöglichkeit.

<u>Verschiebungsformel</u>
Die Varianz lässt sich oft einfacher mit der Verschiebungsformel berechnen. Es gilt:

$$\boxed{\mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-\mu^2} \qquad \text{mit } \mu=E(X)$$

Beweis: Man geht von der Definition der Varianz aus und formt etwas um.

$$\mathrm{Var}(X)=(x_1-\mu)^2\cdot W(x_1)+(x_2-\mu)^2\cdot W(x_2)+\ldots+(x_n-\mu)^2\cdot W(x_n)$$
$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2\cdot W(x_k)$$
$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2-2x_k\cdot\mu+\mu^2\right)\cdot W(x_k)$$
$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot W(x_k)-\sum_{k=1}^{n}2x_k\cdot\mu\cdot W(x_k)+\sum_{k=1}^{n}\mu^2\cdot W(x_k)$$
$$\mathrm{Var}(X)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot W(x_k)}_{=E\left(X^2\right)}-2\mu\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot W(x_k)}_{=\mu}+\mu^2\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n}W(x_k)}_{=1}$$
$$\mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-2\mu^2+\mu^2$$
$$\mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-\mu^2$$

Bsp.: Gegeben ist folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	-2	0	2	4	5
W(x)	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung

$$E(X)=-2\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}4=2{,}6=\mu$$

$$E\left(X^2\right)=(-2)^2\cdot 0,2+0^2\cdot 0,1+2^2\cdot 0,1+4^2\cdot 0,2+5^2\cdot 0,4=14,4$$
$$Var\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\mu^2=14,4-2,6^2=7,64$$
$$\sigma=\sqrt{Var\left(X\right)}=\sqrt{7,64}\approx 2,76$$

Aufgaben

9.0 **(NT12 1999 S II)** Bei einem Kindergartenfest ist die Hauptattraktion ein in acht gleich große Sektoren unterteiltes Glücksrad. Fünf der Sektoren sind rot, zwei grün und einer blau gefärbt. Zur Rotation gebracht, kommt das Rad nach kurzer Zeit zum Stillstand und eine der Farben erscheint in einem Fenster. Bei einem Spiel wird das Glücksrad zweimal nacheinander zur Rotation gebracht. Erscheinen beide Male der blaue Sektor, so erhält der entsprechende „Spieler" 10 Gummibärchen als Gewinn, bei zwei grünen Sektoren 8 Bärchen, bei zwei roten 3 Bärchen; in allen anderen Fällen wird 1 Bärchen als „Trostpreis" vergeben.
Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der in einem Spiel gewonnenen Gummibärchen an.

9.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y (und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm).

9.2 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße Y.

10. **(NT12 2017 S I)** Eine Fluggesellschaft bietet ihren Gästen an, das Essen gegen einen gewissen Aufpreis zu einem Menü abzuwandeln und somit auf die individuellen Essenswünsche anzupassen. Die Zufallsgröße X beschreibt dabei den Aufpreis in €. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in folgender Tabelle zusammengefasst:

x	0	2	3	5
$P\left(X=x\right)$	0,15	0,05	0,4	0,4

Berechnen Sie den durchschnittlich zu zahlenden Aufpreis sowie die Standardabweichung von X.

10.4 $\sigma-$Umgebung um den Erwartungswert

Oft ist es in der Statistik so, dass die Zufallsgrößen den Erwartungswert gar nicht annehmen können. Aber es ist wichtig, dass die Zufallsgrößen in der „Nähe" des Erwartungswertes liegen bzw. in seiner „Umgebung". Eine Rolle spielt dabei die Standardabweichung. Mit ihr kann man nun ein Intervall um den Erwartungswert bestimmen, in welchem dann auch Zufallswerte liegen. Dieses Intervall nennt man $\sigma-$Umgebung um den Erwartungswert. Dabei interessiert man sich nun dafür, dass die Zufallswerte innerhalb der Standardabweichung um den Erwartungswert liegen, d.h. im Intervall $\mu-\sigma<x<\mu+\sigma$.

Beispiel: Eine Abfüllanlage befüllt Flaschen, die möglichst genau 100 ml einer bestimmten Desinfektionslösung beinhalten sollen. Produktionsbedingt kommt es leider zu Abweichungen. Im Rahmen der Qualitätskontrolle werden einige Flaschen hinsichtlich ihres befüllten Volumens untersucht. Die gemessenen Volumina können dabei durch die Zufallsgröße X beschrieben werden.

Volumen in ml	96	97	98	99	100	101	102	103
$P\left(X=x\right)$	0,04	0,08	0,12	0,18	0,20	0,13	0,11	0,14

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Volumen einer befüllten Flasche im einfachen Intervall der Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

$$E(X) = ... = 99,95 = \mu$$
$$E(X^2) = ... = 9993,85$$
$$Var(X) = 9993,85 - 99,95^2 = 3,8475$$
$$\sigma(X) = ... \approx 1,96$$

Dann gilt für das einfache Intervall der Standardabweichung σ um den Erwartungswert μ:

$$\left.\begin{array}{l} \mu - \sigma = 99,95 - 1,96 = 97,99 \\ \mu + \sigma = 99,95 + 1,96 = 101,91 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 97,99 < X < 101,91$$

Und für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X im einfachen Intervall der Standardabweichung um den Erwartungswert liegt, gilt dann:

$$P(97,99 < X < 101,91) = \underbrace{P(X=98)}_{0,12} + \underbrace{P(X=99)}_{0,18} + \underbrace{P(X=100)}_{0,20} + \underbrace{P(X=101)}_{0,13} = 0,63$$

Das heißt, dass 63% der befüllten Flaschen im einfachen Intervall der Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Ergänzungen:

1. Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallswerte außerhalb des einfachen Intervalls der Standardabweichung um den Erwartungswert liegen gilt dann:
   $$P\left(\overline{97,99 < X < 101,91}\right) = 1 - 0,63 = 0,37$$
2. Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallswerte innerhalb des zweifachen Intervalls der Standardabweichung um den Erwartungswert liegen gilt dann:
   $$\left.\begin{array}{l} \mu - 2\cdot\sigma = 99,95 - 2\cdot 1,96 = 96,03 \\ \mu + 2\cdot\sigma = 99,95 + 2\cdot 1,96 = 103,87 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 96,03 < X < 103,87$$
   $$P(96,03 < X < 103,87) = ... = 0,96$$
3. Es gäbe dann auch noch die dreifache $\sigma -$Umgebung um den Erwartungswert!

Aufgaben

11.0 **(NT12 2012 S I)** 30 Linkshänder unterziehen sich einem Reaktionstest, bei welchem sie mit der rechten Hand beim Auftreten eines Ereignisses eine Taste betätigen. Folgende Tabelle zeigt, mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$, die gemessenen und auf Zehntelsekunden gerundeten Reaktionszeiten der Versuchspersonen:

Reaktionszeit in s	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Anzahl der Personen	a	6	b	a	3

11.1 Berechnen Sie die Werte a und b, wenn bekannt ist, dass genau 21 Versuchspersonen höchsten 0,6 s Reaktionszeit benötigten.

11.2 Die Zufallsgröße X gibt nun die Reaktionszeit einer zufällig herausgegriffenen Versuchsperson an. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

12.0 **(NT12 2015 S I)** Ein Medikament wir in zwei Varianten (normal und plus) sowie in drei verschiedenen Packungsgrößen (N1, N2 und N3) angeboten. Der Verkaufspreis in Euro wird als Zufallsgröße X aufgefasst. Dabei ergibt sich mit $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Art	N1	N1 plus	N2	N2 plus	N3	N3 plus
x	5	7	9	12	22	28
$P(X=x)$	0,1	a	b	$b-0,05$	$a+0,15$	2a

12.1 Bestimmen Sie die Werte von a und b, wenn $E(x)=18,48$ gilt.

12.2 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte außerhalb des einfachen Intervalls der Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

13.0 **(NT12 2016 S I)** Ein Pharmakonzern führt eine Untersuchung über die Wirksamkeit des Grippemittels G durch. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Tage bis zur vollständigen Genesung bei Einnahme des Medikaments G an. Dabei ergibt sich mit $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	a	$b-2a$	0,4	b	0,15	2a

13.1 Bestimmen Sie die Parameter a und b, wenn die vollständige Genesung im Durchschnitt nach 6,6 Tage eintritt.

13.2 Berechnen Sie $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)$.

13.3 Ermitteln Sie mit Hilfe der Werte aus 12.1 die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse auf 5 Nachkommastellen gerundet:

E_1: „Von 20 Patienten sind nach 4 Tagen genau 4 vollständig genesen.“

E_2: „Von 100 Patienten tritt bei höchstens 30 die vollständige Genesung nach genau 7 Tagen ein.“

E_3: „Von 50 Patienten tritt bei mindestens 10, aber weniger als 20 die vollständige Genesung nach genau 7 Tagen ein.“

14.0 **(NT12 2009 S I)** In einer Zulassungsstelle werden Fahrzeuge in fünf Leistungsklassen erfasst. Die Zufallsgröße X gibt die Leistungsklasse eines zufällig ausgewählten Fahrzeugs an. Mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	a	b	0,18	0,13	0,14

14.1 Berechnen Sie a und b für den Fall, dass für den Erwartungswert E(X) gilt:
E(X) = 2,48.
[Teilergebnis: $a=0,38$]

14.2 Zeichnen Sie ein Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

14.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.
Schraffieren Sie die zu dieser Wahrscheinlichkeit gehörende Fläche im Histogramm von Teilaufgabe 12.2.

15.0 **(NT12 2007 S I)** Der Mathematiklehrer einer größeren Klasse hat durch Beobachtungen über einen längeren Zeitraum bemerkt, dass ab und zu einige Schüler ihre Hausaufgabe zum fälligen Termin nicht gemacht haben. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Schüler dieser Klasse an, die zu einem beliebigen Termin die Mathematik-Hausaufgabe nicht erledigt haben. Dabei ergibt sich mit den Parametern a, b, c $\in$ R folgende Verteilung (andere Zufallswerte treten nicht auf):

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	a	b	0,2	b+c	c	0,1	0,05

15.1 Berechnen Sie die Parameter a, b und c, wenn im Durchschnitt 3 Schüler ihre Hausaufgabe nicht gemacht haben und $P(X \leq 3) = 0,65$ ist. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X geeignet graphisch dar.
[Teilergebnis: a = 0,05; b = 0,1]

15.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

16.0 **(NT12 2006 S II)** Die Hochschule hat einen Eingangstest in Mathematik abgehalten, an dem genau 500 Studienanfänger aller Fachrichtungen teilgenommen haben. Die Notenverteilung ergibt sich aus der folgenden Tabelle, in der a, b und c entsprechende Konstanten darstellen:

Noten	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Prüflinge	a	b	167	122	b	c

Die Zufallsgröße Y gibt die Note eines beliebig herausgegriffenen Prüflings an. Für diese Zufallsgröße gilt: Der Erwartungswert $E(Y)$ beträgt 3,0 und die Varianz $Var(Y)$ ist gleich 1,7.

16.1 Zeigen Sie zunächst, dass sich aus den obigen Angaben folgendes lineare Gleichungssystem (LGS) herleiten lässt:

I. $a + 2b + c = 211$

II. $a + 7b + 6c = 511$

III. $a + 29b + 36c = 1895$

16.2 Berechnen Sie nun aus dem LGS von 10.1 die Konstanten a, b und c.
[Lösung: $a = 99$; $b = 52$; $c = 8$]

16.3 Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y an und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm.

16.4 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert $E(Y)$ liegen. Schraffieren Sie anschließend im Histogramm von Teilaufgabe 10.3 die zugehörige Fläche.

10.5 Binomialverteilte Zufallsgrößen

Für binomialverteilte Zufallsgrößen ist die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz etwas einfacher.

Für den Erwartungswert gilt:

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Für die Varianz gilt:

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Beispiel: Eine Urne enthält 10 weiße und 20 schwarze Kugeln, von denen 6 Stück mit Zurücklegen gezogen werden. Zufallsgröße X sei die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

x	0	1	2	3	4	5	6
W(x)	$\frac{1}{729}$	$\frac{12}{729}$	$\frac{60}{729}$	$\frac{160}{729}$	$\frac{240}{729}$	$\frac{192}{729}$	$\frac{64}{729}$

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte im einfachen Intervall der Standardabweichung um den Erwartungswert liegen:

$$\mu = 6 \cdot \tfrac{2}{3} = 4$$

$$\sigma = \sqrt{6 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{3}} \approx 1{,}15$$

$$P(2{,}85 < X < 5{,}15) = \ldots = \tfrac{592}{729} \approx 0{,}812$$

Aufgaben:

17. Bei einer Tombola enthält die Urne 1000 Lose. Es gewinnen 1 Los mit 500,-€, 4 Lose mit je 100,-€ und 5 Lose mit je 10,-€. Wie groß ist der durchschnittliche Verlust beim Kauf eines Loses um 1,-€?
    Zufallsgröße X sei der Reingewinn.
18. Bei einem Würfelspiel wird mit 2 Würfeln geworfen. Die Augensummen 2 oder 12 gewinnen das 10-fache der Augenzahl in €, die Augensummen 3 oder 11 gewinnen das 5-fache, die Augensummen 4 oder 10 gewinnen das 3-fache. Andernfalls erfolgt keine Gewinnzahlung. Wie groß ist der Erwartungswert des Gewinns? Welcher Einsatz wäre annehmbar?
19. *(Chuck-a-luck)* Auf einem Rummelplatz wird in eine Glücksbude folgendes Spiel angeboten: Der Spieler leistet 1€ Einsatz, darf eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 nennen und dann 3 Würfel werfen. Zeigt mindestens einer der Würfel seine Zahl, so erhält er vom Budenbesitzer den Einsatz zurück und außerdem für jeden weiteren Würfel, der diese Zahl zeigt, noch zusätzlich 1€. Erscheint seine Zahl nicht, so verfällt der Einsatz.
    Die Zufallsgröße X sei der Gewinn bei diesem Glücksspiel. Berechnen Sie den Erwartungswert dieses Zufallsexperiments. Was sagt dieser aus?