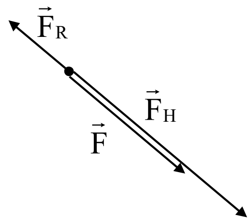
2013 I Lösung

1.1 Da der Wagen auf einer Strecke von s_{12} verzögert wird, setzt man mit der zeitfreien Bewegungsgleichung an und verwendet für die Beschleunigung $a = -a_V = -0{,}60\,\frac{m}{s^2}$.

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 \cdot a \cdot s_{12}$$
$$v_2^2 = 2 \cdot a \cdot s_{12} + v_1^2$$
$$v_2 = \sqrt{2 \cdot a \cdot s_{12} + v_1^2}$$
$$v_2 = \sqrt{2 \cdot \left(-0{,}60\,\tfrac{m}{s^2}\right) \cdot 5{,}0\,m + \left(2{,}5\,\tfrac{m}{s}\right)^2} = \underline{\underline{0{,}50\,\tfrac{m}{s}}}$$

1.2 Die beschleunigende Kraft $\vec{F}$ erhält man als resultierende aus der Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$ und der Reibungskraft $\vec{F}_R$. Nach nebenstehender Skizze folgt somit für die Beträge der Kräfte:

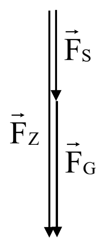


$$F = F_H - F_R$$
$$F = F_H - \mu \cdot F_N$$
$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$
$$a = g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$
$$a = 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2} \cdot \sin(50°) - 0{,}012 \cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2} \cdot \cos(50°) = \underline{\underline{7{,}4\,\tfrac{m}{s^2}}}$$

1.3.1 Im Punkt P_6 besitzt der Wagen also noch 92% der Gesamtenergie, welche er im Punkt P_5 hatte. Somit folgt:

$$0{,}92 \cdot E_{Ges;P_5} = E_{Ges;P_6}$$
$$0{,}92 \cdot \left(E_{kin;P_5} + E_{pot;P_5}\right) = E_{kin;P_6} + E_{pot;P_6} \qquad \text{mit } E_{pot;P_5} = 0$$
$$0{,}92 \cdot \tfrac{1}{2} m \cdot v_5^2 = \tfrac{1}{2} m \cdot v_6^2 + m \cdot g \cdot h$$
$$0{,}92 \cdot v_5^2 = v_6^2 + 2 \cdot g \cdot h$$
$$v_6^2 = 0{,}92 \cdot v_5^2 - 2 \cdot g \cdot h$$
$$v_6 = \sqrt{0{,}92 \cdot v_5^2 - 2 \cdot g \cdot h}$$
$$v_6 = \sqrt{0{,}92 \cdot \left(27\,\tfrac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 29\,m} = \underline{\underline{10\,\tfrac{m}{s}}}$$

1.3.2 Im Punkt P_6 gilt, dass die zum Kreismittelpunkt gerichtete Zentripetalkraft F_Z aufgebracht wird durch die nach unten gerichtete Gewichtskraft F_G und der von den Schienen aufgebrachten Kraft F_S, welche ebenfalls nach unten gerichtet ist. Somit gilt:

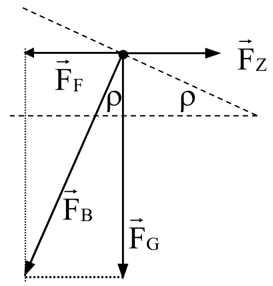


$$F_Z = F_G + F_S$$
$$F_S = F_Z - F_G$$
$$F_S = m \cdot \frac{v_6^2}{r} - m \cdot g$$
$$F_S = 950\,kg \cdot \frac{\left(10\,\frac{m}{s}\right)^2}{6{,}5\,m} - 950\,kg \cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2} = \underline{\underline{5{,}3\,kN}}$$

1.4 Ziel bei der Kurvenüberhöhung ist es, dass die aus Zentrifugalkraft $\vec{F}_F$ $\left(\vec{F}_F = -\vec{F}_Z\right)$ und Gewichtskraft $\vec{F}_G$ des Fahrzeugs resultierende Kraft $\vec{F}_B$ senkrecht auf die Fahrbahn wirkt. Somit gilt für die Beträge der Kräfte:

$$\tan\rho = \frac{F_F}{F_G}$$

Mit $F_F = F_Z$ folgt dann:

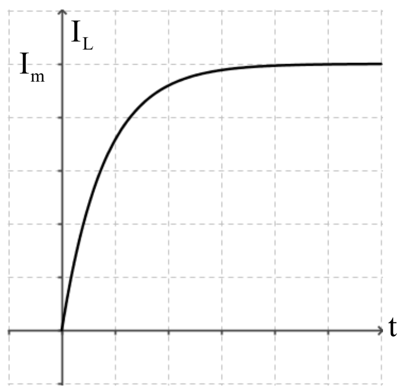


$$\tan\rho = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{R}}{m \cdot g} = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

$$\rho = \arctan\left(\frac{v^2}{R \cdot g}\right)$$

$$\rho = \arctan\left(\frac{\left(11\,\frac{m}{s}\right)^2}{14\,m \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}\right) = \underline{\underline{41°}}$$

2.1.1 Legt man an eine Spule die Spannung U_G an, so steigt die Stromstärke I_L in der Spule an. Durch den Strom entsteht in der Spule ein Magnetfeld. Diese Änderung der Magnetfeldstärke B führt zu einer Änderung des magnetischen Flusses Φ in der Spule. Nach $U_i = -L \cdot \dot{\Phi}$ wird in der Spule eine Spannung U_i induziert, die nach der Lenz´schen Regel ihrer Ursache, also der Spannung U_G entgegenwirkt und somit das Ansteigen des Stromes I_L in der Spule hemmt. Folge dessen erreicht die Stromstärke I_L nicht sofort ihrem Maximalwert I_m.



Es gilt: $U_L(t) = U_G + U_i(t) = U_G - L \cdot \dot{\Phi}(t)$

mit $I_L(t) = \dfrac{U_L(t)}{R} = \dfrac{U_G - L \cdot \dot{\Phi}(t)}{R}$ folgt:

Zum Zeitpunkt $t = 0$: $U_L(0) = 0$ da $U_i(0) = -U_G$, somit ist auch $I_L(0) = 0$

Mit der Zeit t verringert sich die Magnetfeldänderung in der Spule, wodurch $U_i(t) \to 0$ und somit $U_L(t) \to U_G$. Dann erreicht $I_L(t) = \dfrac{U_L(t)}{R} = \dfrac{U_G}{R} = I_m$ ihren maximalen Wert I_m.

2.1.2 Es gilt: $R = \dfrac{U_G}{I_m} = \dfrac{12\,V}{0{,}40\,A} = 30\,\Omega$

2.2.1 Es gilt: $U(t) = \hat{U} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$

Für eine Spule, mit der Induktivität L und dem ohmschen Widerstand R, die an eine Wechselspannungsquelle mit der Spannung U angeschlossen ist gilt:

$U_R(t) + U_L(t) = U(t)$

Da nach der Angabe in 2.2.0 aber $X_L >> R$ und somit $U_L(t) >> U_R(t)$ folgt aus obiger Gleichung: $U_L(t) = U(t)$

Und somit:

$$U_L(t) = U(t)$$

$$-L \cdot \dot{I}(t) = \hat{U} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

$$\dot{I}(t) = -\frac{\hat{U}}{L} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

Nun benötigt man eine Stammfunktion von $I(t)$, also:

$$I(t) = -\frac{\hat{U}}{2\pi \cdot f \cdot L} \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t) + k$$ mit der Integrationskonstanten $k \in \mathbb{R}$.

Diese Integrationskonstante entspricht aber einem konstantem Gleichstromanteil von dem aber in der Aufgabenstellung nicht die Rede ist; also folgt: $k = 0$

Insgesamt erhält man:

$$I(t) = -\frac{\hat{U}}{2\pi \cdot f \cdot L} \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t)$$

2.2.2 Es gilt:

$$\hat{I} = I_{eff} \cdot \sqrt{2} \qquad \text{nach 2.2.1 ist aber}: \hat{I} = \frac{\hat{U}}{2\pi \cdot f \cdot L}$$

$$\frac{\hat{U}}{2\pi \cdot f \cdot L} = I_{eff} \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{\hat{U}}{2\pi \cdot f \cdot I_{eff} \cdot \sqrt{2}} = L$$

$$L = \frac{12\,\text{V}}{2\pi \cdot 1{,}20 \cdot 10^3\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 16 \cdot 10^{-3}\,\text{A} \cdot \sqrt{2}} = \underline{\underline{70\,\text{mH}}}$$

2.3.1 Für die Induktivität einer lang gestreckten Spule gilt:

$$L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{\ell} \cdot A = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{3000^2}{0{,}20\,\text{m}} \cdot 12{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 = \underline{\underline{70\,\text{mH}}}$$

2.3.2 Es gilt: $\Phi = B \cdot A = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} \cdot A = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{3000 \cdot 0{,}40\,\text{A}}{0{,}20\,\text{m}} \cdot 12{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 = \underline{\underline{9{,}3 \cdot 10^{-6}\,\text{Vs}}}$

2.3.3 Tritt der Weisenkern in die Spule ein, so nimmt der magnetische Fluss $\Phi = B \cdot A = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{I}{\ell} \cdot A$ durch die Spule zu, da in der Spule $\mu_r > 1$ zunimmt. Somit wird zwischen den Enden der Spule eine Spannung U_i induziert, welche nach der Lenz´schen Regel das Anwachsen des magnetischen Flusses hemmt. Da $\dot{\Phi} > 0$ wirkt $U_i = -N \cdot \dot{\Phi} < 0$ der Spannung U_G entgegen und somit wird der durch die Spule fließende Strom I kleiner, also $I < I_m$.

Fällt der Weicheisenkern nun aus der Spule wieder heraus, so wird in der Spule μ_r wieder kleiner und der magnetische Fluss $\Phi = B \cdot A = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{I}{\ell} \cdot A$ nimmt somit ab. Die dadurch induzierte Spannung U_i wird positiv und unterstützt somit U_G. Der durch die Spule fließende Strom I wird somit größer, also $I > I_m$. Dadurch scheidet Bild 1 schon mal aus.

Aufgrund der ständig zunehmenden Fallgeschwindigkeit des Weicheisenkerns ist aber die betragliche Änderung des magnetischen Flusses beim Austritt aus der Spule größer als beim Eintritt in die Spule. Damit ist der Betrag der induzierten Spannung U_i beim

Austritt größer als beim Eintritt und folge dessen muss die Stromstärke I durch die Spule beim Austritt stärker ansteigen als bei Eintritt absinken. Bild 2 scheidet somit ebenfalls aus und Bild 3 ist dann richtig.