

AP 2011 II (Lösung)

1.1 Da der Satellit sich auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt gilt:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Gr}} &= F_Z \\
 G \cdot \frac{m_s \cdot m_E}{R^2} &= m_s \cdot \omega^2 \cdot R \\
 G \cdot \frac{m_E}{R^3} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \\
 T^2 &= \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E} \\
 T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot m_E}}
 \end{aligned}$$

1.2.1 Ein Synchronsatellit ist ein Satellit, der von der Erde aus gesehen über demselben Ort stillzustehen scheint. Dazu müssen folgende drei Bedingungen erfüllt sein.

- Flugbahn muss in der Äquatorebene liegen (der Satellit kreist um den Mittelpunkt der Erde).
- Die Winkelgeschwindigkeit ω_s des Satelliten beim Umkreisen der Erde muss genau so groß sein, wie die Winkelgeschwindigkeit ω_E der Erde um die eigene Achse.
- Die Umlaufrichtung des Satelliten um die Erde muss der mit Drehrichtung der Erde übereinstimmen.

1.2.2 Nach Teilaufgabe 1.1 gilt: $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}$

Mit $R = r_E + h$ folgt dann für die Höhe h :

$$\begin{aligned}
 T^2 &= \frac{4\pi^2 \cdot (r_E + h)^3}{G \cdot m_E} \\
 \frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2} &= (r_E + h)^3 \\
 r_E + h &= \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2}} \\
 h &= \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2}} - r_E \\
 h &= \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600 \text{ s})^2 \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi^2}} - 6,368 \cdot 10^6 \text{ m} = \underline{\underline{35,9 \cdot 10^6 \text{ m}}}
 \end{aligned}$$

Für die Bahngeschwindigkeit v folgt somit:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot (r_E + h) = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot (35,9 \cdot 10^6 \text{ m} + 6,368 \cdot 10^6 \text{ m}) = \underline{\underline{3,07 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} \quad (= 3,07 \frac{\text{km}}{\text{s}})$$

1.3.1 Für die Winkelgeschwindigkeit ω_M des Mondes gilt:

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M} = \frac{2\pi}{27,32 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 2,662 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}}$$

Für den Radius R_M der Umlaufbahn folgt mit Hilfe der Teilaufgabe 1.1 dann:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}$$

$$R^3 = \frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{(27,32 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2 \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi^2}} = \underline{\underline{3,832 \cdot 10^8 \text{ m}}}$$

1.3.2 In der Zeit t_N hat sich die Erde um den Winkel ρ um die Sonne gedreht. In dieser Zeit hat der Mond sich einmal um die Erde bewegt (2π) und zusätzlich noch den Winkel ρ zurückgelegt. Daher gilt für die zurückgelegten Winkel:

Drehwinkel der Erde + 2π = Drehwinkel des Mondes

$$\rho_E + 2\pi = \rho_M$$

$$\omega_E \cdot t_N + 2\pi = \omega_M \cdot t_N$$

$$2\pi = \omega_M \cdot t_N - \omega_E \cdot t_N$$

$$(\omega_M - \omega_E) \cdot t_N = 2\pi$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_E} \right) \cdot t_N = 2\pi$$

$$\left(\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_E} \right) \cdot 2\pi \cdot t_N = 2\pi$$

$$t_N = \frac{1}{\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_E}}$$

$$t_N = \frac{T_M \cdot T_E}{T_M + T_E}$$

$$t_N = \frac{27,32 \text{ d} \cdot 365,25 \text{ d}}{27,32 \text{ d} + 365,25 \text{ d}} = \underline{\underline{29,53 \text{ d}}}$$

2.1 $E_{\text{kin},0} = \frac{1}{2} m_p v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \left(4,8 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 1,9 \cdot 10^{-14} \text{ J} (= 0,12 \text{ MeV})$

2.2 Die elektrische Feldkraft F_{el} verrichtet die Arbeit W_{el} an den Protonen. Dadurch nimmt die kinetische Energie des Protons um die Energie ΔE_{kin} zu. Somit gilt:

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{el}} = e \cdot U_B \Rightarrow \Delta E_{\text{kin}} = e \cdot U_B$$

2.3.1 Verlässt ein Proton die Triftröhre T_n , so muss zu diesem Zeitpunkt an dieser der Scheitelwert der positiven Wechselspannung und an der Triftröhre T_{n+1} der Scheitelwert der negativen Wechselspannung anliegen. Nun wird das Proton im Zwischenraum der Triftröhren beschleunigt. Nach der Zeit $\Delta t = \frac{1}{2}T = \text{konst.}$ (halbe Periodendauer) verlässt das Proton die Triftröhre T_{n+1} . An dieser muss nun der Scheitelwert der positiven Wechselspannung anliegen. Da nun gilt $\Delta s = v \cdot \Delta t$ muss bei größerer werdender Geschwindigkeit v der Protonen der Weg Δs größer werden. Somit muss die Länge der Triftröhre von Triftröhre zu Triftröhre größer werden.

2.3.2 Beim Eintritt in die Triftröhre T_4 hat wurde das Proton viermal in den Zwischenräumen beschleunigt und besitzt somit die kinetische Energie $E_{\text{kin},4}$. Für diese gilt:

$$E_{\text{kin},4} = E_{\text{kin},0} + 4 \cdot \Delta E_{\text{kin}}$$

$$\frac{1}{2} m_p \cdot v_4^2 = E_{\text{kin},0} + 4 \cdot e \cdot \hat{U}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{2 \cdot (E_{\text{kin},0} + 4 \cdot e \cdot \hat{U})}{m_p}}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{2 \cdot (1,9 \cdot 10^{-14} \text{ J} + 4 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,80 \cdot 10^6 \text{ V})}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = \underline{\underline{2,5 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Für die Länge ℓ_4 der vierten Triftröhre folgt dann nach 2.3.1:

$$\ell_4 = v_4 \cdot \Delta t = v_4 \cdot \frac{1}{2}T = v_4 \cdot \frac{1}{2f} = \frac{2,5 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 50 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}} = \underline{\underline{25 \text{ cm}}}$$

2.4.1 Bedingungen:

- Magnetfeld muss homogen und zeitlich konstant sein.
- Flussdichte \vec{B} muss senkrecht zur Geschwindigkeit \vec{v}_E gerichtet sein ($\vec{B} \perp \vec{v}_E$)
- Nach der Drei-Finger-Regel muss das Magnetfeld \vec{B} aus der Zeichenebene heraus gerichtet sein.

2.4.2 Die Lorentzkraft \vec{F}_L , welche das Proton im Magnetfeld erfährt, ist die für die Bewegung des Protons auf dem Kreisbogen notwendige Zentralkraft \vec{F}_Z . Für deren Beträge gilt:

$$F_Z = F_L$$

$$m_p \cdot \frac{v_E^2}{r} = e \cdot v_E \cdot B$$

$$v_E = \frac{e \cdot r \cdot B}{m_p}$$

$$v_E = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,40 \text{ m} \cdot 0,700 \text{ T}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = \underline{\underline{2,7 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

$$\text{Einheitenkontrolle: } \frac{\text{C} \cdot \text{m} \cdot \text{T}}{\text{kg}} = \frac{\text{As} \cdot \text{m} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{\text{kg}} = \frac{\text{VA} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}}{\text{kg}} = \frac{\text{J} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}}{\text{kg}} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.4.3 Aus $v_E = \frac{e \cdot r \cdot B}{m_p}$ (siehe 2.4.2) folgt: $r = \frac{m_p}{e \cdot B} \cdot v_E$

Da nun $\frac{m_p}{e \cdot B} = \text{konst.}$, muss bei größer werdender Geschwindigkeit v_E auch der Bahnradius r größer werden (und umgekehrt). Die Protonen gelangen somit nicht mehr durch die Lochblende.