Der beste Lehrer ist jener,
der sich nach und nach überflüssig macht.
(George Orwell)

§ 3 Lineare Funktionen

Wir betrachten zunächst Funktionen, deren Graphen gerade Linien sind.
Dabei wollen wir zu einem gegebenen Funktionsterm, den zugehörigen Funktionsgraphen zeichnen und umgekehrt, anhand des Funktionsgraphen, den zur Funktion gehörigen Funktionsterm bestimmen können.

3.1 Die lineare Funktion und ihr Funktionsgraph

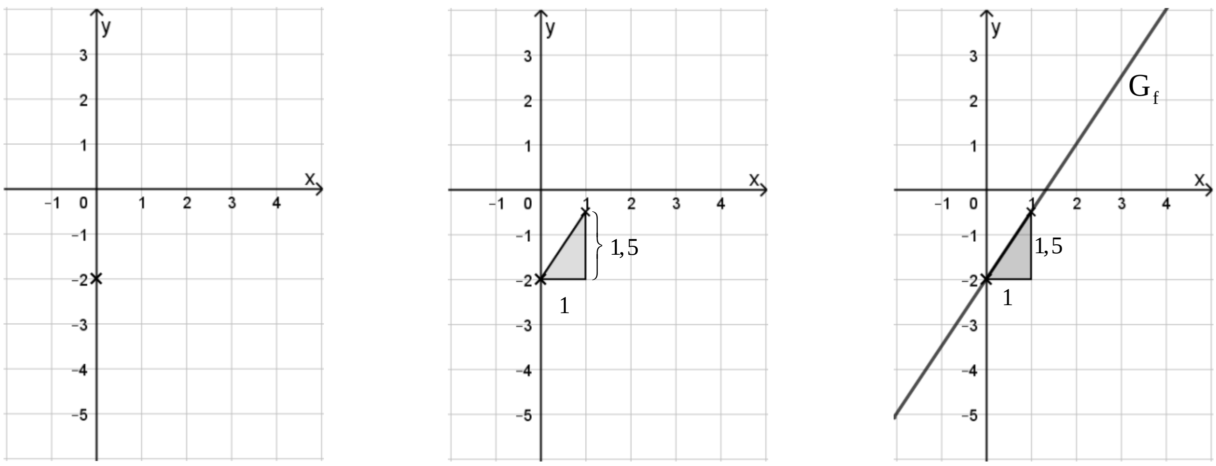
Eine Funktion der Form $f: x \mapsto m \cdot x + t$ mit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$ heißt **lineare Funktion**.

Die Gleichung $y = m \cdot x + t$ heißt Funktionsgleichung der linearen Funktion.
Der Graph der linearen Funktion ist eine Gerade.

Die Parameter m und t haben dabei folgende Bedeutung.
- m nennt man die **Steigung** der Geraden, sie beschreibt deren Steigungsverhalten.
- t nennt man den **y-Achsenabschnitt** der Geraden, er gibt den Wert an, an welchem die Gerade die y-Achse schneidet.

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 1{,}5 \cdot x - 2$ mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$.
Zeichen Sie den Graphen der Funktion f.

Man beginnt damit, dass man zunächst den y-Achsenabschnitt t einzeichnet. D.h. man zeichnet sich auf der y-Achse beim Wert -2 einen Punkt (Kreuz) ein.

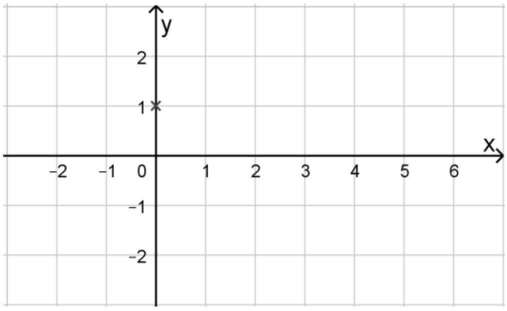


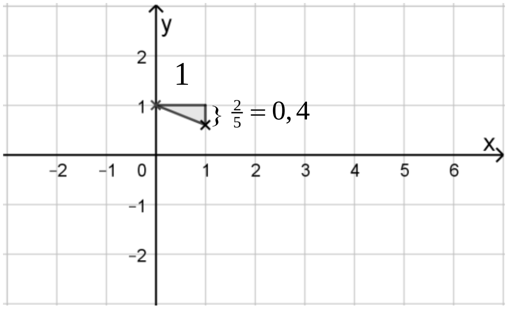
Nun benötigt man, um die Gerade einzeichnen zu können, noch einen zweiten Punkt. Diesen erhält man mit Hilfe der Steigung m. Dazu geht man von dem bereits eingezeichneten Punkt eine Einheit nach rechts und anschließend (bei positivem Wert für m) den Wert der Steigung m, also 1,5 Einheiten nach oben. Somit ergibt sich ein zweiter Punkt, durch welchen die gesuchte Gerade verläuft. Zeichnet man durch diese beiden Punkte eine Gerade, so erhält man die gesuchte Gerade, bzw. den Funktionsgraphen der Funktion f.

Bemerkung: Wäre $m = -1{,}5$, dann würde man 1,5 Einheiten nach unten gehen!

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{2}{5} \cdot x + 1$ mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$.
Zeichen Sie den Graphen der Funktion f.

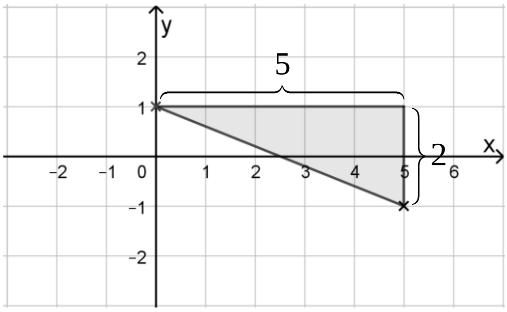
Man beginnt wieder damit, dass man zunächst den y-Achsenabschnitt t einzeichnet. D.h. man zeichnet sich auf der y-Achse beim Wert $+1$ einen Punkt (Kreuz) ein.

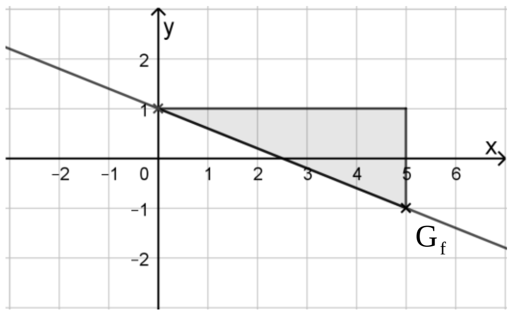




Geht man nun vom y-Achsenabschnitt aus eine Einheit nach rechts und $\frac{2}{5} = 0{,}4$ Einheiten nach unten, so erhält man wieder einen zweiten Punkt der Geraden.
Da zeigt sich allerdings nun schon das erste Problem, da sich 0,4 Einheiten nicht unbedingt sehr gut einzeichnen lassen (bei Steigungen wie z. Bsp. $m = \frac{2}{7}$ wäre das noch viel viel schwieriger).
Das zweite Problem besteht darin, dass die Genauigkeit der einzuzeichnenden Geraden mit kleiner werdendem Abstand der beide Punkte zunehmend schwieriger wird.

Die Lösung besteht nun darin, dass man für das Steigungsdreieck (rechnerisch) eine zentrische Streckung durchführt. Der Streckfaktor wird dabei idealerweise so gewählt, dass der Wert der Steigung m einen ganzzahligen Wert ergibt.
Multipliziert man nun den Wert $-\frac{2}{5}$ mit (dem Streck-) Faktor 5, so erhält man den ganzzahligen Wert -2. Gleichzeitig muss aber auch die Strecke, die man vom y-Achsenabschnitt aus in x-Richtung geht um den Faktor 5 gestreckt werden. Somit vergrößert sich nun das Steigungsdreieck.
Nun geht man also vom y-Achsenabschnitt 5 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten. Somit erhält man einen zweiten Punkt, mit dessen Hilfe sich die gesuchte Gerade mit guter Genauigkeit einzeichnen lässt.





Bemerkenswert ist, dass die Länge der Katheten des Steigungsdreiecks den Werten des Bruchs $-\frac{2}{5}$ zu entnehmen sind.
Also:
5 Einheiten in x-Richtung $\Rightarrow$ $\Delta x = 5$
und
2 Einheiten nach unten in y-Richtung $\Rightarrow$ $\Delta y = -2$

Vorgehensweise zum Einzeichnen des Graphen (Gerade) der Funktion $f: y = mx + t$

1. y-Achsenabschnitt t auf der y-Achse einzeichnen $\Rightarrow P_1\left(0|t\right)$
2. vom y-Achsenabschnitt nun eine Einheit waagrecht nach rechts in x-Richtung (Δx) und den Wert der Steigung m senkrecht dazu in y-Richtung (Δy) $\Rightarrow P_2\left(1|t+m\right)$
3. Gerade durch die beiden Punkte einzeichnen und beschriften.

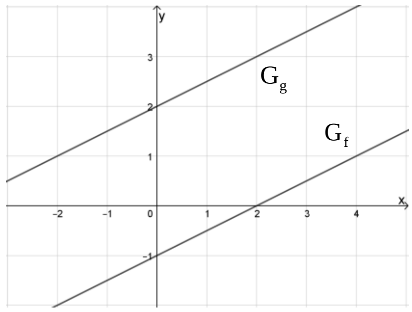
Aufgaben:

1. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem ein.
   a) $f_1: x \mapsto 2x - 4$
   b) $f_2: x \mapsto -x + 2$
   c) $f_3: x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$
   d) $f_4: x \mapsto -\frac{3}{4}x + 3$
   e) $f_5: x \mapsto \frac{2}{5}x - 1$
   f) $f_6: x \mapsto -\frac{4}{7}x + 1{,}5$

Besondere Geraden:

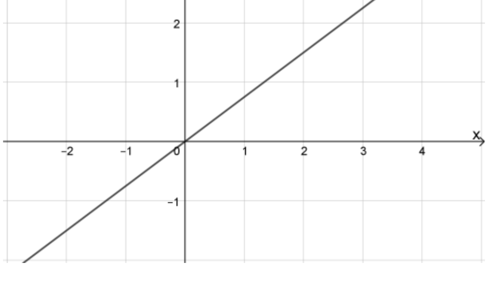
- Parallele Geraden: Geraden sind zueinander parallel, wenn sie den gleichen Steigungsfaktor besitzen.

  Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$ und $g: x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$.
  Da die beiden Geradengleichungen $\left(y = \frac{1}{2}x - 1 \text{ und } y = \frac{1}{2}x + 2\right)$ denselben Steigungswert $\left(m = \frac{1}{2}\right)$ besitzen, verlaufen die beiden Geraden parallel zueinander.



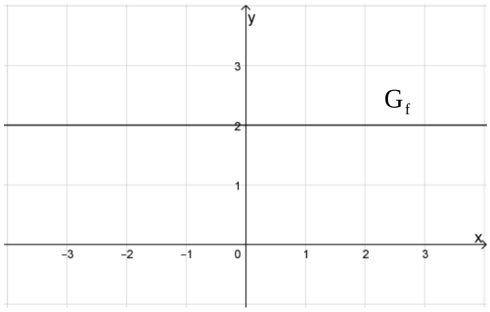
- Ursprungsgeraden: Besitzt eine Geradegleichung den y-Achsenabschnitt $t = 0$, dann verläuft die Geraden durch den Koordinatenursprung. Daher nennt man sie auch Ursprungsgerade. Die Funktion beschreibt dann eine direkte Proportionalität der beiden Größen x und y.

  Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{4}x$.
  Da für den y-Achsenabschnitt $t = 0$ gilt, verläuft die Gerade durch den Koordinatenursprung.
  Somit sind die beiden Größen x und y direkt proportional zueinander, d.h. sie sind quotientengleich (und es gilt der Dreisatz!).



- Parallele zur x-Achse: Hat eine Gerade die Steigung $m = 0$, dann verläuft die Gerade parallel zur x-Achse. Da die Funktionsgleichung dann nur noch von der Form $y = t$ ist, nennt man die Funktion auch konstante Funktion.

  Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2$
  Funktionsgleichung: $y = 2$
  Die Gerade verläuft parallel zur x-Achse und hat den Abstand 2.

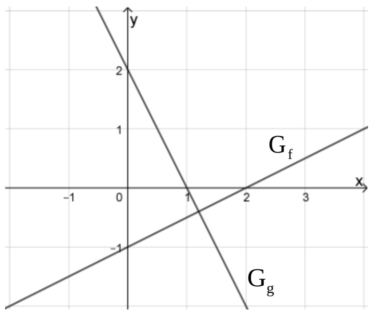


- Parallele zur y-Achse: Parallelen zur y-Achse sind zwar Geraden, aber sind (mathematisch gesehen) nicht Graph einer linearen Funktion. Da alle Punkte dieser Geraden denselben x-Wert besitzen, werden sie durch eine Gleichung der Form $x = k$ beschrieben.

  Die Gerade mit der Gleichung $x = -1$ verläuft parallel zur y-Achse und hat von ihr den Abstand 1 (links von der y-Achse!).

- Senkrechte Geraden: Zwei Geraden stehen aufeinander senkrecht, wenn das Produkt der beiden Steigungen den Wert -1 ergibt. Also: $m_1 \cdot m_2 = -1$

  Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$ und $g: x \mapsto -2x + 2$.
  Es gilt: $m_1 = \frac{1}{2}$ und $m_2 = 2$.
  Da $m_1 \cdot m_2 = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$, stehen die beiden Geraden aufeinander senkrecht.



  Bemerkung: Auch die beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen $x = 3$ und $y = 1$ stehen aufeinander senkrecht.

Aufgaben:

2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Geraden parallel zueinander verlaufen.
   $f_1: y = \frac{1}{2}x - 2$ $\quad f_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ $\quad f_3: y = -2x - 2$
   $f_4: y = 2 - 2x$ $\quad f_5: y = \frac{1}{2}x$ $\quad f_6: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

3. Entscheiden Sie, welche der folgenden Geraden senkrecht aufeinander stehen.
   $f_1: y = \frac{1}{2}x - 2$ $\quad f_2: y = -\frac{1}{2}x - 2$ $\quad f_3: y = -2x - 2$
   $f_4: y = 2 - x$ $\quad f_5: y = 2x$ $\quad f_6: y = x - 2$

4. Entscheiden Sie, welche der folgenden Geraden durch den Ursprung verlaufen.
   $f_1: y = \frac{1}{2}x$ $\quad f_2: y = \frac{1}{2}x - 1$ $\quad f_3: y = -x$
   $f_4: y = 2 - x$ $\quad f_5: y = 2x$ $\quad f_6: y = x - 2$

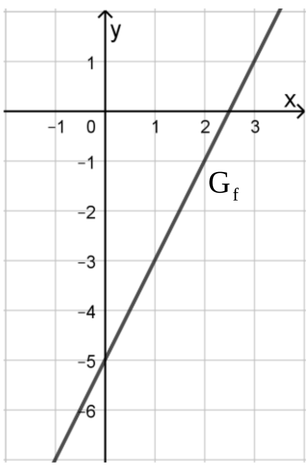
5. Entscheiden Sie, welche der folgenden Geraden parallel zur
   - x-Achse
   - y-Achse
   - Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten
   - Winkelhalbierenden des 2. und 4 Quadranten verlaufen.

   $f_1: y = 2x - 2$ $\quad f_2: y = 2$ $\quad f_3: y = -x + 1$
   $f_4: x = 2$ $\quad f_5: y = x - 1$ $\quad f_6: y = -\frac{1}{2}x + 2$

3.2 Funktionsgleichung einer Geraden mit Hilfe der Graphik bestimmen

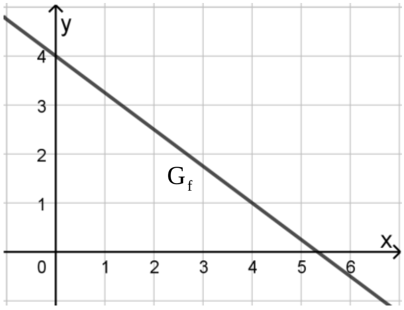
Oft kommt es aber auch vor, dass der Graph einer linearen Funktion (Gerade) gegeben ist und man den Funktionsterm bestimmen soll.

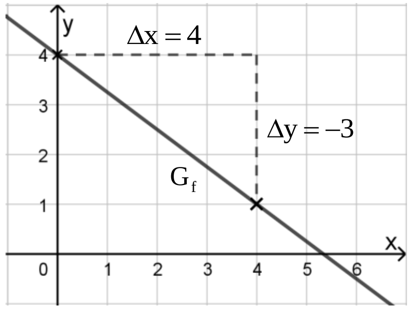
Beispiel 1: Gegeben ist die Gerade G_f. Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm der Geraden.



Um den Funktionsterm zu bestimmen, nutzt man das Schema, das man beim Einzeichnen des Funktionsgraphen schon verwendet haben.
Als erstes kann man sehr gut den y-Achsenabschnitt ablesen. Dieser hat den Wert $t = -5$.
Geht man nun vom y-Achsenabschnitt eine Einheit nach rechts, so muss man zwei Einheiten nach oben gehen, um zu einem zweiten Punkt auf dem Graphen zu kommen. Daher hat die Steigung den Wert $m = 2$.
Insgesamt folgt nun: $f: y = 2x - 5$

Beispiel 2: Gegeben ist die Gerade G_f. Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm der Geraden.





Als erstes entnimmt man der Zeichnung den Wert des y-Achsenabschnitt. Dieser hat den Wert $t = 4$.
Geht man nun vom y-Achsenabschnitt eine Einheit nach rechts, so lässt sich der Zeichnung nur näherungsweise entnehmen, wie viele Einheiten man nach unten gehen muss. Da dieses Verfahren zu ungenau ist, nutzt man ein etwas größeres Steigungsdreieck.
Man sucht sich nun einen Gitterpunkt (möglichst weit vom y-Achsenabschnitt entfernt), durch den die Gerade verläuft.
Zu diesem gelangt man nun, vom y-Achsenabschnitt ausgehend, indem man $\Delta x = 4$ in x-Richtung geht und $\Delta y = -3$ Einheiten in y-Richtung. Für die Steigung gilt dann:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Also hier: $m = \frac{-3}{4} = -0,75$

Insgesamt folgt nun: $f: y = -0,75x + 4$

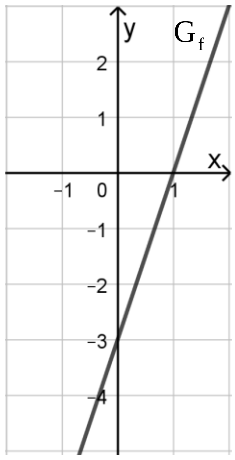
Vorgehensweise zur Bestimmung des Funktionsterms bei gegebenen Funktionsgraph:

1. y-Achsenabschnitt t auf der y-Achse ablesen.
2. Zweiten Geradenpunkt suchen, der durch einen Gitterpunkt verläuft
3. Mit Hilfe des Steigungsdreiecks die Werte für Δx und Δy bestimmen.
4. Steigung m erhält man mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
5. Geradengleichung angeben: $y = mx + t$

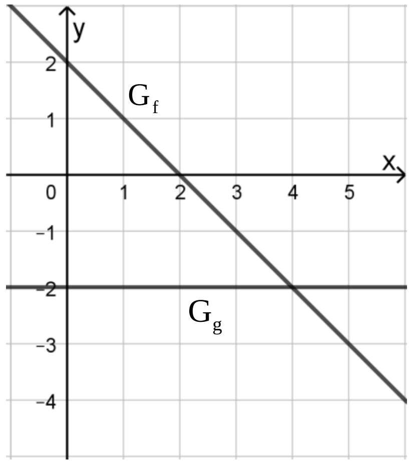
Aufgaben:

6. Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm der eingezeichneten Geraden.

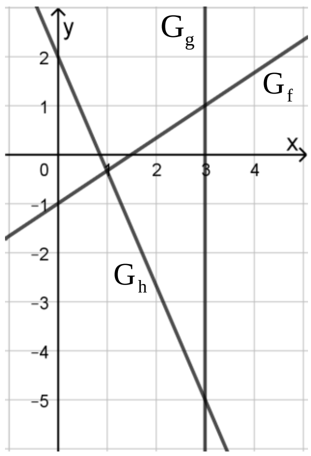
a)



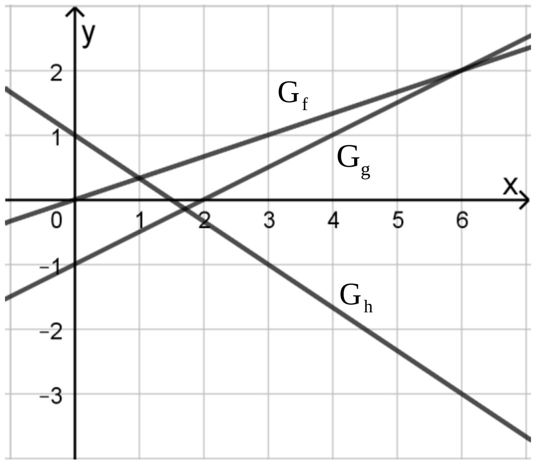
b)



c)



d)

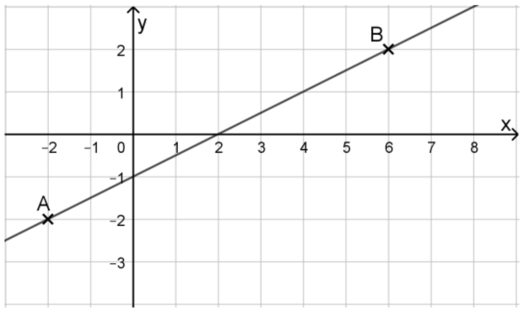


3.3 Rechnerische Bestimmung der Funktionsgleichung einer Geraden

Oft muss man aber die Gleichung der Geraden (Funktionsgleichung) mit Hilfe gegebener Eigenschaften bestimmen.

Beispiel 1: Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden, welche durch die Punkte $A\left(-2\middle|-2\right)$ und $B\left(6\middle|2\right)$ verläuft.

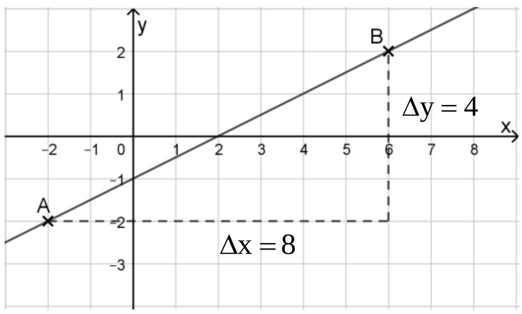
Wir zeichnen zunächst die Punkte A und B in ein Koordinatensystem ein, sowie die Gerade, welche durch diese beiden Punkte festgelegt ist.
Man könnte in dem Fall nun den y-Achsenabschnitt und evtl. sogar die Steigung entnehmen, aber das ist dann keine rechnerische Bestimmung der Geradengleichung mehr. Daher muss man anders vorgehen.



Wir zeichnen zunächst das Steigungsdreieck mit den Punkt A und B ein und bestimmen die Werte für Δx und Δy.
Dabei gilt:

$\Delta x = x_B - x_A = 6 - (-2) = 8$

$\Delta y = y_B - y_A = 2 - (-2) = 4$



Somit lässt sich die Steigung m der Geraden mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmen: $m = \frac{4}{8} = 0,5$

Dann hat die gesuchte Geradengleichung schon mal die Form: $y = 0,5x + t$

Da der Wert für t nicht abgelesen werden darf (kann), muss dieser wie folgt ermittelt werden.
Man setzt nämlich jetzt die Koordinaten des Punktes A (oder B) in die Gleichung $y = 0,5x + t$ ein und löst die Gleichung dann nach t auf:

$$-2 = 0,5 \cdot (-2) + t$$
$$-2 = -1 + t$$
$$t = -1$$

Somit erhält man die gesuchte Geradengleichung: $y = 0,5x - 1$

Vorgehensweise zur Bestimmung des Funktionsterms bei gegebenen Funktionsgraph:

1. Steigung m bestimmen: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
2. Den Wert der Steigung m und die Koordinaten eines gegebenen Punktes in die Gleichung $y = mx + t$ einsetzen und nach t auflösen.
3. Geradengleichung angeben.

Aufgaben:

7. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte
   a) $A(2|1)$ und $B(4|4)$
   b) $A(-3|-2)$ und $B(3|-3)$
   c) $P(-2,5\,|\,-0,5)$ und $Q(1,5\,|\,2)$
   d) $M(\frac{2}{3}\,|\,-\frac{1}{2})$ und $N(-\frac{3}{4}\,|\,\frac{1}{3})$

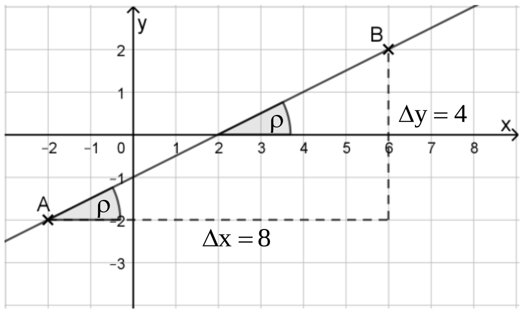
8. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden die durch den Punkt $P(3|1)$ und
   a) parallel zur Geraden mit der Gleichung $y=-2x+1$ verläuft.
   b) senkrecht zur Geraden mit der Gleichung $y=3x-1$ verläuft.
   c) parallel zur y-Achse verläuft.
   d) parallel zur x-Achse verläuft.
   e) parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten verläuft.
   f) parallel zur Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten verläuft.
   g) parallel zur Geraden durch die Punkte $A(-1|-2)$ und $B(3|5)$ verläuft.

Beispiel 2: Ermitteln Sie das Maß des Winkels ρ, unter dem die Gerade aus Beispiel 1 die x-Achse schneidet.

Der Schnittwinkel ρ der Geraden mit der x-Achse entspricht dem eingezeichneten Winkel im Steigungsdreieck (Stufenwinkel).
Für diesen Winkel gilt allgemein im rechtwinkligen Steigungsdreieck:

$$\tan\rho = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad\Rightarrow\quad \tan\rho = m$$

Also: $\tan\rho = 0,5 \quad\Rightarrow\quad \varphi \approx 26,6°$



Bemerkung:
Den Winkel unter dem eine Gerade die x-Achse schneidet nennt man auch den Steigungswinkel der Geraden.

Aufgaben:

9. Ermitteln Sie das Maß des Winkels, unter dem die gegebenen Gerade die x-Achse schneidet.
   a) Gerade mit der Gleichung $y=\frac{1}{3}x-2$
   b) Gerade mit der Gleichung $y=-\frac{2}{3}x+1$
   c) Gerade durch $P(-1|1)$ und $Q(4|3)$
   d) Gerade durch $P(-1|1)$ und $Q(4|-3)$
   e) Gerade durch $P(3|7)$ und den Koordinatenursprung

3.4 Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenachsen

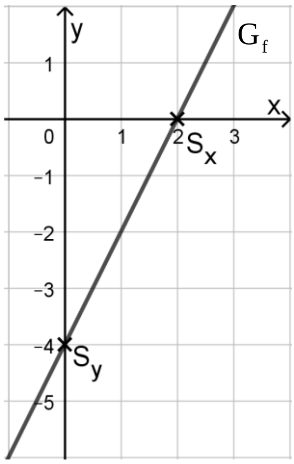
Die Schnittpunkte des Graphen einer Funktion mit den Koordinatenachsen spielen später, insbesondere bei anwendungsbezogenen Aufgaben, eine große Rolle.

Beispiel 1: Gegeben ist die Gerade mit der Funktionsgleichung $f: y = 2x - 4$. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkt des Graphen (Geraden) mit den Koordinatenachsen.

- Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die x-Koordinate 0. Setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung (Geradengleichung) ein, so ergibt sich:
  $y = 2 \cdot 0 - 4 \quad \Rightarrow \quad y = -4$
  Der Schnittpunkt S_y mit der y-Achse hat somit die Koordinaten $S_y\left(0|-4\right)$
- Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat die y-Koordinaten 0. Setzt man $y = 0$ in die Funktionsgleichung (Geradengleichung) ein, so ergibt sich:
  $$\begin{aligned} 0 &= 2x - 4 && |-2x \\ -2x &= -4 && |:(-2) \\ x &= 2 \end{aligned}$$
  Der Schnittpunkt S_x mit der x-Achse hat somit die Koordinaten $S_x\left(2|0\right)$

Bemerkung: Den x-Wert des Schnittpunktes mit der x-Achse nennt man auch Nullstelle.
In unserem Beispiel 1 hat die Gerade die Nullstelle $x = 2$.

Die Gerade G_f lässt sich nun auch sehr gut mit Hilfe der beiden Schnittpunkte in ein Koordinatensystem einzeichnen.



Vorgehensweise zur Bestimmung Schnittpunkte des Graphen der Funkt f mit den Koordinatenachsen:

1. Schnittpunkt mit der y-Achse:
   $x = 0$ in die Funktionsgleichung einsetzen $\quad \Rightarrow \quad S_y\left(0|f(0)\right)$

2. Schnittpunkt mit der x-Achse:
   $y = 0$ setzen und die Gleichung nach x auflösen.
   Die Lösung x_N dieser Gleichung gibt den x-Wert des Schnittpunktes an $\quad \Rightarrow \quad S_x\left(x_N|0\right)$

Aufgaben:

10. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit den Koordinatenachsen.
    a) $f: y = -3x + 9$
    b) $f: y = \frac{2}{3}x - 2$
    c) $f: y = -\frac{4}{9}x - 3$
    d) $f: y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$

3.5 Schreibweisen für Geradengleichungen

In der Mathematik gibt es verschiede Schreibweisen für die Gleichung einer Geraden.

Beispiel 1: Gegeben ist die Gerade $f: y = \frac{1}{2}x - 3$

- Ist die Gleichung der Geraden in der Form $y = \frac{1}{2}x - 3$ gegeben, so nennt man diese Form **Normalform** (weil es die normale Form für eine Geradengleichung ist!) oder auch explizite Form.

- Klammert man auf der rechten Seite der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$ die Steigung $m = \frac{1}{2}$ aus, so erhält man ein Produkt
  $$y = \frac{1}{2}x - 3$$
  $$y = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)$$
  Daher nennt man diese Form der Gleichung auch **Produktform**.

- Formt man die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$ so um, dass auf einer Seite der Gleichung der Wert 0 steht
  $$y = \frac{1}{2}x - 3$$
  $$0 = \frac{1}{2}x - y - 3$$
  so nennt man diese Form implizite Form.

Aufgaben:

11. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f sowie deren y-Achsenabschnitt und zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem ein.
    a) $f: y = 2 \cdot (x - 3)$
    b) $f: y = -\frac{2}{3} \cdot (x + 3)$
    c) $f: \frac{3}{2}x - y + 2 = 0$
    d) $f: 2x - 3y + 6 = 0$

3.6 Lagebeziehung Punkt – Gerade

Die Lage geometrischer Figuren zueinander spielt eine wichtige Rolle.

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion $f: y = \frac{1}{2}x - 2$ und die Punkte $A(2|-1)$ und $B(-2|1)$.
Entscheiden Sie, ob die Punkte A und B auf der Geraden G_f liegen.

Um zu überprüfen, ob ein Punkt auf einem Funktionsgraphen liegt, muss man seine x-Koordinate in den Funktionsterm einsetzen.

Für den Punkt A folgt:
$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = 1 - 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad P(2|-1)$ ist ein Punkt, der (an der Stelle $x = 2$) auf der Geraden liegt. Da er dieselben Koordinaten wie der Punkt A besitzt, stimmen die beiden Punkte überein und somit liegt auch der Punkt A auf der Geraden.
Für den Punkt B gilt:
$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 2 = -1 - 2 = -3 \quad \Rightarrow \quad Q(-2|-3)$ ist ein Punkt, der (an der Stelle $x = -2$) auf der Geraden liegt. Da die Punkt Q und B unterschiedliche y-Koordinaten besitzen, stimmen diese beiden nicht überein und somit liegt der Punkt B auch nicht auf der Geraden.
Da der Punkt B einen größeren Wert besitzt als der Punkt Q, liegt der Punkt B oberhalb der Geraden G_f .

Vorgehensweise zur Lagebestimmung eines Punktes A mit einer Geraden G_f :

1. Die x-Koordinate des gegebenen Punktes in die Geradengleichung (Funktionsgleichung) einsetzen: $f(x_A)$ berechnen
2. Ist der erhaltene Funktionswert identisch mit dem y-Wert des gegebenen Punktes, so liegt der Punkt A auf der Geraden G_f .

Aufgaben:

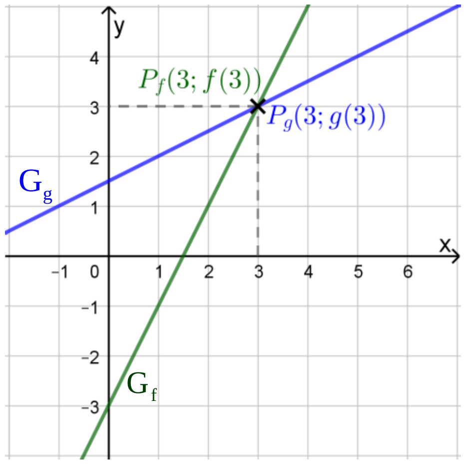
12. Entscheiden Sie, ob der Punkt A auf der gegebenen Geraden G_f liegt.
    a) $f: y = -x + 3$ und $A(-2|2)$
    b) $f: y = \frac{2}{3}x - 2$ und $A(3|0)$
    c) $f: y = -\frac{5}{9}x + 1$ und $A(0|1)$

13. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate des Punktes A so, dass auf der gegebenen Geraden G_f liegt.
    a) $f: y = -2x + 5$ und $A(3|y_A)$
    b) $f: y = \frac{2}{7}x - 1$ und $A(x_A|2)$
    c) $f: y = -1{,}25x - 3$ und $A(x_A|4)$

3.7 Schnittpunkt zweier Geraden

Zwei Geraden, die nicht parallel verlaufen, schneiden sich in einem Punkt.

Beispiel 1: Gegeben sind die beiden Geraden $f: y = 2x - 3$ und $g: y = \frac{1}{2}x + 1{,}5$



Der Schnittpunkt ist derjenige Punkt, für den die beiden zugehörigen Funktionen an der (selben) Stelle x den gleichen y-Wert besitzen. Somit müssen also an der Stelle x die Funktionsterme $f(x)$ und $g(x)$ den gleichen Wert haben. Es muss also gelten:

$$f(x) = g(x)$$

Setzt man nun die jeweiligen Funktionsterme ein, so erhält man die Gleichung:

$$2x - 3 = \tfrac{1}{2}x + 1{,}5 \quad \left| -\tfrac{1}{2}x + 3 \right.$$
$$1{,}5x = 4{,}5 \quad |:1{,}5$$
$$x = 3$$

Die Lösung $x = 3$ dieser Gleichung ist die x-Koordinate des gemeinsamen Schnittpunktes.
Nun setzt man $x = 3$ in eine der beiden obigen Funktionsgleichungen ein:

$$f: y = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$$

Für die Koordinaten des Schnittpunktes S gilt dann: $S(3|3)$

Vorgehensweise um den Schnittpunkt zweier Geraden G_f und G_g zu bestimmen.

1. Funktionsterme gleichsetzen: $f(x) = g(x)$
2. Gleichung nach x auflösen, man erhält die Lösung x_S
3. Den Wert x_S in den Funktionsterm $f(x)$ einsetzen $(\text{oder in } g(x))$, man erhält:
   $y_S = f(x_S)$
4. Schnittpunkt angeben: $S(x_S|y_S)$

Aufgaben:

14. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden G_f und G_g.
    a) $f: y = 2x - 3$ und $g: y = 1{,}5 - x$
    b) $f: y = -\frac{2}{3}x - 4$ und $g: y = 1{,}5x + 2{,}5$
    c) $f: y = \frac{4}{5}x + 1$ und $g: y = -\frac{5}{4}x - 1$
    d) $f: y = 2x - 4$ und $g: 0 = 3y - 6x + 12$

15. Begründen Sie, ob die beiden Geraden G_f und G_g einen Schnittpunkt besitzen und geben Sie gegebenenfalls (ohne Rechnung!) die Koordinaten des Schnittpunktes S an.
    a) $f: y = 3x + 3$ und $g: y = 3x - 3$
    b) $f: y = -3x + 3$ und $g: y = 3x + 3$
    c) $f: y = -\frac{1}{2}x - 2$ und $g: y = -\frac{1}{2}(x + 4)$
    d) $f: y = x - 2$ und $g: y = \frac{1}{2}(x - 2)$

3.8 Anwendungen zu den linearen Funktionen

Beispiel 1: Ein Patient erhält aus einer Infusionsflasche eine Kochsalzlösung, die ihm über die Vene in die Blutbahn eingeträufelt wird. Die Infusionsflasche hat zu Beginn einen Inhalt von 1 Liter und pro Minute werden dem Patienten 7,5 ml eingeträufelt.
Stellen Sie einen (linearen) Funktionsterm auf, der angibt, wie viel Kochsalzlösung sich nach x Minuten noch in der Infusionsflasche befindet.

Gesucht ist also eine Funktion

$$f: y = mx + t$$

mit der Veränderlichen x (vergangene Zeit in Minuten) und der abhängigen Größe y (Restmenge der Infusion).
Zum Zeitpunkt $x = 0$ (min) sind $y = 1000$ (ml) in der Flasche. Daher gilt:

$$1000 = m \cdot 0 + t \quad \Rightarrow \quad t = 1000$$

Somit erhält man schon mal: $f: y = mx + 1000$
Nachdem $x = 1$ Minute verstrichen ist, sind noch $y = 1000 - 7{,}5 = 992{,}5$ (ml) in der Infusionsflasche. Daher folgt:

$$992{,}5 = m \cdot 1 + 1000 \quad \Rightarrow \quad m = -7{,}5$$

Somit folgt: $f: y = -7{,}5x + 1000$

Bestimmen Sie, nach welcher Zeit noch 100 ml in der Infusionsflasche vorhanden sind?

Es gilt:

$$\begin{aligned} 100 &= -7{,}5x + 1000 \\ 7{,}5x &= 900 \\ x &= 120 \end{aligned}$$

Nach einer Zeit von 120 Minuten sind somit noch 100 ml Kochsalzlösung in der Infusionsflasche.

Bemerkung:
Bei Zeitabhängigen Größen gibt der y-Achsenabschnitt t immer den Startwert zum Zeitpunkt $x = 0$ an und die Steigung m entspricht der Änderungsrate (pro Zeiteinheit).

Aufgaben

16.0 Simon will ein Praktikum in den USA belegen; er paukt ordentlich Vokabeln. Er schätzt seinen Wortschatz auf 900 Wörter, er will täglich 12 neue Vokabeln dazu lernen. Er fliegt in sieben Wochen.

16.1 Stellen Sie einen Funktionsterm auf, der einen Zusammenhang zwischen der Lerndauer (in Tagen) und den insgesamt gelernten Vokabeln herstellt.

16.2 Berechnen Sie, wie viele Wörter Simon bei seinem Abflug in die USA kennt.

16.3 Ermitteln Sie, wie lange er lernen müsste um seinen Wortschatz zu verdoppeln.

17.0 In einem Krankenhaus benötigt man viel Desinfektionslösung. Zurzeit sind noch $144\,\ell$ vorhanden. Pro Tag werden $12\,\ell$ verbraucht.

17.1 Stellen Sie einen Funktionsterm auf, der den Zusammenhang zwischen den verstreichenden Tagen und der verbleibenden Desinfektionslösung herstellt.

17.2 Bestimmen Sie, nach wie vielen Tagen dem Krankenhaus die Desinfektionslösung aus geht?

17.3 Bei einem Bestand von $60\,\ell$ wird nachbestellt. Ermitteln Sie, in wie vielen Tagen dies geschehen muss.

18.0 Von einem gewissen Dopingmittel weiß man, dass der Abbau linear mit $2{,}35\,\frac{\text{mg}}{\text{h}}$ geschieht. Zwei Stunden nach Einnahme werden bei einem Sportler noch $4{,}60\,\text{mg}$ des Dopingmittels noch nachgewiesen.

18.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

18.2 Bestimmen Sie die Konzentration nach $3\text{h}\ 15\,\text{min}$.

18.3 Eine Konzentration unter 1mg ist mit einer bestimmten Untersuchungsmethode nicht mehr nachzuweisen. Wie viele Stunden und Minuten vor dem Wettkampf müsste ein Sportler dieses Dopingmittel einnehmen, um bei einem Test zwei Stunden nach dem Wettkampf eine Konzentration unter 1mg aufzuweisen?

Beispiel 2:

Der Energieversorger Stark-Strom bietet für seine Kunden einen Stromtarif an, der einen Arbeitspreis von 28 Cent pro Kilowattstunde und einen Grundpreis von 11,50 € pro Monat umfasst.

Stellen Sie einen (linearen) Funktionsterm auf, der angibt, wie hoch die Gesamtkosten y für eine Menge von x (verbrauchten) Kilowattstunden Strom sind.

Gesucht ist also eine Funktion

$$f: y = mx + t$$

mit der Veränderlichen x (verbrauchten Kilowattstunden) und der abhängigen Größe y (Gesamtkosten).

Falls noch kein Strom verbraucht wurde, also $x = 0$, fällt auf alle Fälle der Grundpreis an. Daher gilt:

$$11{,}5 = m \cdot 0 + t \quad \Rightarrow \quad t = 11{,}50$$

Somit erhält man schon mal: $f: y = mx + 11{,}50$

Ist nur eine Kilowattstunde Strom verbraucht, also $x = 1$ so belaufen sich die Kosten auf $11{,}50 + 0{,}28 = 11{,}78$. Daher folgt:

$$11{,}78 = m \cdot 1 + 11{,}50 \quad \Rightarrow \quad m = 0{,}28$$

Somit folgt: $f: y = 0{,}28x + 11{,}50$

Bemerkung:
Bei „wirtschaftlichen“ Aufgaben bzw. Aufgaben bei denen es um Kosten geht, entspricht der y-Achsenabschnitt t den fixen Kosten und die Steigung m den variablen Kosten.

Berechnen Sie mit Hilfe der Funktionsgleichung die monatlichen Gesamtkosten für einen monatlichen Stromverbrauch von 350 kWh.

Für die monatlichen Kosten gilt: $y = 0,28 \cdot 350 + 11,50 \quad \Rightarrow \quad y = 109,50$
Die monatlichen Kosten betrag somit 109,50 €.

Familie Stromberg erhält für den Monat Mai eine Stromrechnung über 88,50 €. Berechnen Sie mit Hilfe der Funktionsgleichung ihren Verbrauch für diesen Monat.

Es gilt:

$$\begin{aligned} 88,50 &= 0,28x + 11,50 \quad && |-11,50 \\ 77 &= 0,28x && |:0,28 \\ x &= 275 \end{aligned}$$

Der Stromverbrauch im Mai beträgt 275 kWh.

Aufgaben:

19.0 Ein Vertreter erhält von seinem Arbeitgeber zwei verschiedene Gehaltsangebote. Beim Angebot 1 erhält er 2.600€ Grundgehalt und eine Provision von 8% des Monatsumsatzes, Angebot 2 umfasst 1.400€ Grundgehalt und eine Provision von 15% des Monatsumsatzes.

19.1 Stellen Sie die Funktionsterme zur Darstellung beider Gehaltsangebote auf und zeichnen die beiden Funktionsgraphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

19.2 Ermitteln sie, wie hoch sein Gehalt ist, wenn er einen Umsatz von 8.000€ bzw. von 25.000€ hat?

19.3 Bestimmen Sie, bei welchem Monatsumsatz er bei beiden Angebot dasselbe Gehalt erhält, und wie hoch ist dieses Gehalt dann?

20.0 Der Anschaffungswert einer Maschine beträgt 120.000€ .Entsprechend der voraussichtlichen Nutzungsdauer von 8 Jahren wir sie mit 12,5% linear abgeschrieben.

20.1 Stellen Sie einen Funktionsterm zur Darstellung der Buchwerte in Abhängigkeit von den Nutzungsjahren auf und zeichnen sie den dazugehörigen Graphen.

20.2 Entnehmen Sie dem Graphen den Buchwert nach 3,5 Jahren und 8 Jahren.

20.3 Ermitteln Sie, nach wie vielen Jahren die Maschine mit 30.000€ zu Buche steht?

Hinweis: Der Anschaffungswert ist der Nettopreis (ohne MwSt.) eines Anlageguts zuzüglich aller mit dem Erwerb zusammenhängenden Nebenkosten (z.B. Transportkosten, Montagekosten), abzüglich erhaltener Nachlässe (z.B. Rabatt, Skonto). Der Buchwert ist der „in den Büchern“, d.h. auf dem Anlagekonto geführte Wert des Anlageguts, der sich regelmäßig durch die Abschreibungen vermindert.

21.0 Zwei Produktionsverfahren werden diskutiert:
Verfahren A mit computergesteuerten Maschinen, bei dem 600.000€ fixe Kosten und 15€ variable Stückkosten anfallen;
Verfahren B mit handgesteuerten Maschinen, bei dem 121.000€ fixe Kosten und 80€ variable Stückkosten anfallen.

21.1 Stellen Sie die Funktionsterme auf und zeichnen Sie die Graphen der Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.

21.2 Bestimmen Sie die Ausbringungsmenge (Stückzahl), bei der beide Verfahren kostengleich sind.

21.3 Ermitteln Sie für beide Verfahren die Kosten für eine Ausbringungsmenge von 5.000 Stück und 8.000 Stück.

22.0 Ein Draht hat bei einer Temperatur von 40°C eine Gesamtlänge von 174cm, bei einer Temperatur von 5°C eine Gesamtlänge von 164cm.

22.1 Stelle einen linearen Funktionsterm auf, der die Gesamtlänge in Abhängigkeit von der Temperatur angibt. (Wir gehen dabei davon aus, dass sich die Länge innerhalb eines bestimmten Temperaturbereichs linear mit der Temperatur ändert)

22.2 Berechnen Sie die Gesamtlänge des Drahtes bei Raumtemperatur (20°C).

22.3 Ermitteln Sie, welche Gesamtlänge der Draht beim Gefrierpunkt hat?

22.4 Ein anderer Draht, der bei Raumtemperatur die gleiche Länge wie obiger Draht hat, hat bei einer Temperatur von –10°C eine Gesamtlänge von 160mm.
Entscheiden Sie, ob es sich dabei um einen Draht des gleichen Materials handelt?

23.0 In der Fertigungsabteilung eines Kleingeräteherstellers fallen monatlich 57.200 € an fixen Kosten an. Die variablen Kosten betragen 15 € pro Stück. Die Abteilung kann höchstens 3.500 Stück pro Monat produzieren. Der Verkaufspreis des Produkts beträgt 37 €.

23.1 Stellen Sie die Funktionsterme der Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion auf.

23.2 Ermitteln Sie, ob die Abteilung bei einer Produktion von 2.000 Stück rentabel arbeitet.

23.3 Berechnen Sie die Gewinnschwelle.

32.4 Zeichnen Sie die Graphen der drei Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Welche Beziehung besteht zwischen diesen drei Graphen?

23.5 Bestimmen Sie die Gewinnschwelle, wenn sich die variablen Stückkosten um 3,50 € erhöhen und der Verkaufspreis um 7,50 € geringer ausfällt.

24. Daniel Fahrenheit (24.05.1686 bis 16.09.1736) entwickelte seine eigene Temperaturskala, die heute noch in den USA und einigen anderen englischsprachigen Ländern verwendet wird. In Europa war sie solange in Gebrauch, bis sie von der Celsius-Skala abgelöst wurde.
Fahrenheit wählte für seine Skala zwei Fixpunkte. Als Nullpunkt wählte er die tiefste Temperatur des strengen Winters 1708/09 in Danzig (-17,8°C), die er mit einer Mischung aus Eis, Salmiak und Wasser (Kältemischung) immer wieder herstellen konnte. Seine eigene Körpertemperatur legte er bei 100°F fest.

24.1 Stelle eine lineare Funktion auf um eine Temperatur in °C in eine Temperatur in °F umzuwandeln.

24.2 In Deutschland hat man im Sommer Temperaturen von bis zu 38°C. Bestimmen Sie, welcher Temperatur in °F das entspricht.

24.3 In Florida beträgt die durchschnittliche Sommertemperatur 90°F. Ermitteln Sie die Temperatur in °C.