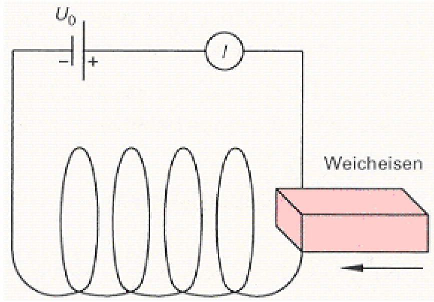
12.12 Selbstinduktion

Spule mit Weicheisenkern

Wird ein Weicheisenkern in eine stromdurchflossene Spule hineingeschoben, so sinkt vorübergehend die Stromstärke I.



Erklärung: Das Eisen erhöht die Flussdichte $\vec{B}$ und damit den magnetischen Fluss Φ. Die dabei entstehende Induktionsspannung U_{ind} addiert sich mit U_0 zur Gesamtspannung

$$U(t) = U_0 + U_{ind} = U_0 - N_i \cdot \dot{\Phi}(t)$$

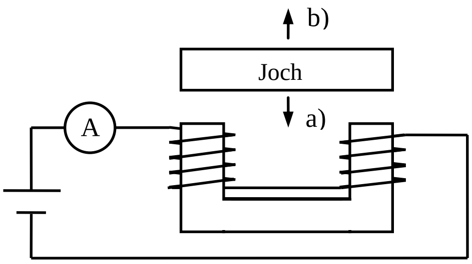
$U(t)$ ist somit kleiner als U_0 und folge dessen sinkt auch der Strom

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0 - N_i \cdot \dot{\Phi}(t)}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{N_i \cdot \dot{\Phi}(t)}{R} = I_0 - \frac{N_i \cdot \dot{\Phi}(t)}{R}$$

Beim Herausziehen des Weicheisenkerns steigt die Stromstärke.

Wird durch die Änderung des magnetischen Flusses in einer stromdurchflossenen Spule selbst eine Spannung induziert, so spricht man von Selbstinduktion.
Die induzierte Spannung überlagert sich dann mit der anliegenden Spannung und wirkt (nach der Lenzschen Regel) jeder Änderung des magnetischen Flusses entgegen.

Auf eine stromdurchflossene Spule mit Eisenkern wird
a) das Joch aufgelegt,
b) das aufliegende Joch abgehoben.



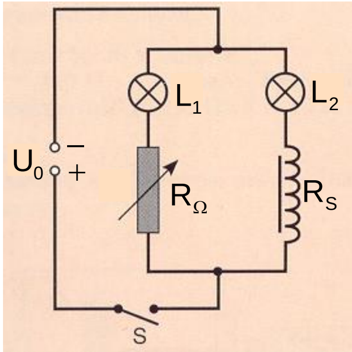
Beobachtung: Der Stormfluss bei
a) vermindert sich kurzzeitig bzw .
b) verstärkt sich kurzzeitig .

Deutung:

a) Durch das Auflegen des Joches wird der magnetische Fluss durch die Spule verstärkt, was nach dem Induktionsgesetz eine Induktionsspannung (hier in der Spule selbst) erzeugt, die der Ursache ihrer Entstehung (der Zunahme des magnetischen Flusses) entgegenwirkt. Die Induktionsspannung ist damit der anliegenden Spannung entgegen gerichtet. Die wirkende Gesamtspannung ist damit geringer, was zu einem geringeren Stromfluss durch die Spule führt.
Die Induktionsspannung tritt jedoch nur so lange auf, wie eine Änderung des magnetischen Flusses durch die Spule vorliegt.

b) Im Fall b) kehrt sich der Sachverhalt gerade um.
Formulieren Sie für diesen Fall den Sachverhalt ausführlich!

Wir untersuchen den Ein- und Ausschaltvorgang in einem Gleichstromkreis mit einem ohmschen Widerstand bzw. einer Spule.
Der Schiebewiderstand vor L_1 ist so eingestellt, dass bei geschlossenem Schalter S die Lampen L_1 und L_2 gleich hell leuchten. In diesem Fall sind die ohmschen Widerstände des Schiebewiderstands (R_Ω) und der Spule (R_S) gleich groß.



<u>Beobachtung beim Schließen des Schalters</u>:
Die Lampe L_2 leuchtet verzögert auf.

<u>Beobachtung beim Öffnen des Schalters</u>:
Beide Lampen erlöschen mit der gleichen zeitlichen Verzögerung.

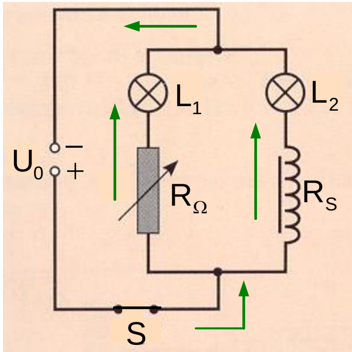
<u>Erklärung des Einschaltvorgangs</u>:
Beim Einschalten vergrößert sich der magnetische Fluss innerhalb der Spule. Es gilt:

$$\dot{\Phi} > 0$$

Somit wird in der Spule eine zur Spannung U_0 entgegengerichtete Spannung

$$U_{ind} = -N_i \dot{\Phi} < 0$$

induziert.
Dies führt im Unterschied zum R-Zweig zu einer Verzögerung des Stromanstieges im Spulenzweig.



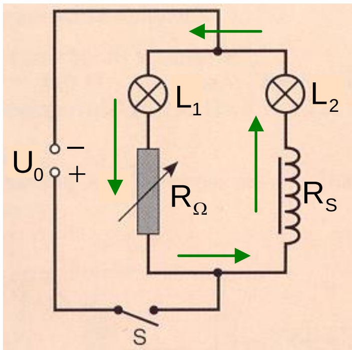
<u>Erklärung des Ausschaltvorgangs</u>:
Beim Ausschalten verringert sich der magnetische Fluss innerhalb der Spule. Es gilt:

$$\dot{\Phi} < 0$$

Somit wird in der Spule eine zur vorher angelegten Spannung U_0 gleich gerichtete Spannung

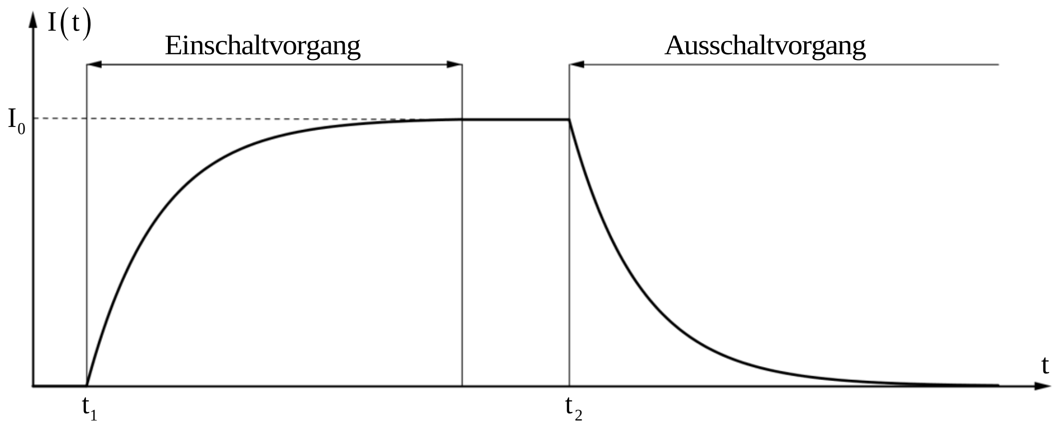
$$U_{ind} = -N_i \dot{\Phi} > 0$$

induziert.
Diese Spannung erzeugt im Spulenzweig einen Induktionsstrom, der die gleiche Richtung hat , wie der ursprüngliche Strom (Schalter geschlossen).
Da Spulen- und R-Zweig einen geschlossenen Stromkreis bilden, fließt der Induktionsstrom durch den R-Zweig, jedoch in entgegengesetzter Richtung zum ursprünglichen Strom. Die Stromabnahme ist somit in beiden Zweigen gleich.



Folgende Diagramme zeigen den Strom- bzw. Spannungsverlauf beim Ein- und Ausschaltvorgang.

Der Einschaltvorgang beginnt zur Zeit t_1 und ist beendet, wenn die Stromstärke ihren Höchstwert I_0 erreicht hat. Der Ausschaltvorgang beginnt zur Zeit t_2 und ist beendet, wenn die Stromstärke auf null abgesunken ist.

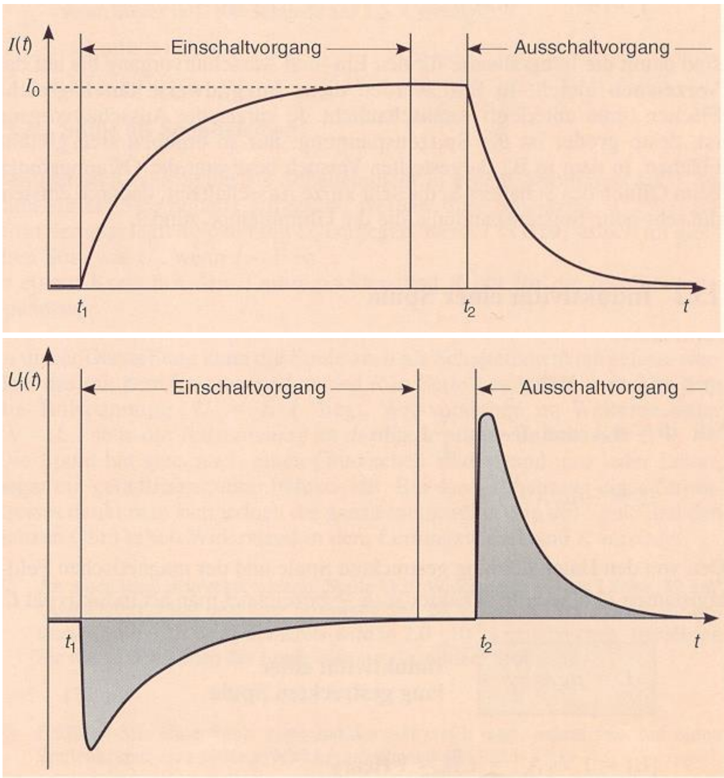


Deutung:

Die induzierte Gegenspannung verzögert das Erreichen des Höchstwertes der Stromstärke, beeinträchtigt ihn selbst jedoch nicht; denn wenn das Magnetfeld aufgebaut ist und der magnetische Fluss sich nicht mehr ändert ist die Gegenspannung $U_{ind} = 0$ geworden.

Beim Ausschalten nimmt die Stromstärke zuerst rasch ab, dann immer langsamer. Die induzierte Spannung treibt jetzt die Elektronen im gleichen Umlaufsinn wie U_0 an.

Die große magnetische Flussänderung bei Beginn des Ausschaltvorgangs, ersichtlich an dem starken Abfall der Stromstärke, bewirkt eine große Induktionsspannung. Je kleiner der Betrag der zeitlichen Stromänderung ist, desto kleiner ist auch die induzierte Spannung.



Bemerkung: Die grauen Flächen haben gleichen Flächeninhalt, denn es gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} U_i(t)\,dt = -N_i \cdot \Delta\Phi$$

das Induktionsgesetz in integraler Form.)

Herleitung obiger Formel:

$$U_i(t) = -N_i \cdot \dot{\Phi}(t)$$
$$U_i(t) = -N_i \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$
$$U_i(t) \cdot dt = -N_i \cdot d\Phi$$
$$\int_{t_1}^{t_2} U_i(t)\,dt = -N_i \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -N_i \cdot \left[\Phi\right]_{\Phi_1}^{\Phi_2} = -N_i \cdot \left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = -N_i \cdot \Delta\Phi$$

Je größer der Betrag der zeitlichen Stromänderung ist, desto größer ist auch die induzierte Spannung. (Dies nutzt man zum Zünden von Leuchtstoffröhren)
Da diese Spannungsspitzen oftmals störend sind und zur Zerstörung von Geräten führen kann, müssen sie durch geeignete Maßnahmen unterdrückt werden.

Induktivität einer langgestreckten Spule (hier ist Feld- und Induktionsspule identisch)
Für eine langgestreckte Spule lässt sich die Selbstinduktionsspannung berechnen.
Für das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule gilt:

$$B(t) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N_F \cdot I(t)}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \dot{B}(t) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N_F}{\ell} \cdot \dot{I}(t)$$

Somit folgt für den magnetischen Fluss Φ:

$$\Phi(t) = A(t) \cdot B(t) \overset{A=\text{konst.}}{=} A \cdot B(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}(t) = A \cdot \dot{B}(t) = A \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N_F}{\ell} \cdot \dot{I}(t)$$

und für die induzierte Spannung U_i

$$U_{ind}(t) = -N_i \cdot \dot{\Phi}(t) = -N_i \cdot \frac{N_F \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{\ell} \cdot \dot{I}(t) \overset{N_i = N_F}{=} -\underbrace{\frac{N_i^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{\ell}}_{L} \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

Die Größe $\frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{\ell}$ heißt Induktivität L der Spule. Somit gilt:

$$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI(t)}{dt} \text{ oder auch } U_{ind} = -L \cdot \dot{I}(t)$$

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{\ell}$$

Einheit der Induktivität: $[L] = 1\frac{V}{\frac{A}{s}} = 1\frac{Vs}{A} = 1H \quad (\text{Henry})$

Energieinhalt einer langen stromdurchflossenen Spule
In obigem Versuch hat sich gezeigt, dass beim Ausschalten die beiden Lämpchen nachgeleuchtet haben. Die dafür nötige Energie muss dann vom Magnetfeld her kommen. Für die Stromarbeit dW in der Zeit dt gilt:

$$P = \dot{W} = \frac{dW}{dt} = U \cdot I \quad \Rightarrow \quad dW = U \cdot I \cdot dt$$

$$dW = U_{ind} \cdot I \cdot dt = -L \cdot \frac{dI}{dt} \cdot I \cdot dt = -L \cdot I \cdot dI$$

Für die gesamte gespeicherte Energie gilt dann:

$$W = \int_{I_1}^{0} (-L) I dI = \int_{0}^{I_1} L I dI = L\left[\tfrac{1}{2} I^2\right]_0^{I_1} = \tfrac{1}{2} L I_1^2$$

Satz: Das Magnetfeld einer vom Strom der Stärke I durchflossenen Spule der Induktivität L besitzt die magnetische Feldenergie

$$\boxed{W_{magn} = \tfrac{1}{2} L I^2}$$

Aufgaben

1. Gegeben ist eine Spule mit $N = 6000$ Windungen, der Länge $\ell = 15\,\text{cm}$ und der Querschnittsfläche $A = 20\,\text{cm}^2$. Berechnen Sie die Induktivität L.

2. Gegeben ist eine Spule mit der Induktivität $L = 630\,\text{H}$. Sie wird von einem Strom der Stärke $I_1 = 50\,\text{mA}$ durchflossen, der in der Zeit $\Delta t = 2{,}0\,\text{s}$ auf die Stärke $I_2 = 100\,\text{mA}$ linear ansteigt. Berechnen Sie den Betrag der in dieser Zeit in der Spule auftretenden Induktionsspannung.

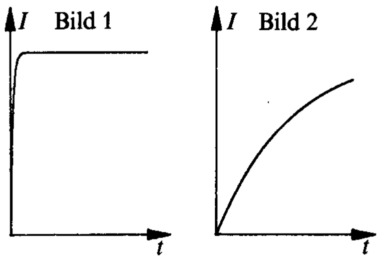
3.0 In einem Stromkreis befindet sich eine Spule der Induktivität $L = 0{,}60\,\text{H}$. Berechnen Sie den Betrag der in ihr induzierten Spannung zum Zeitpunkt $t = 1{,}0\,\text{s}$, wenn im Stromkreis ein veränderlicher Strom der Stromstärke

3.1 $I(t) = 2{,}0\,\frac{\text{A}}{\text{s}} \cdot t$ fließt.

3.2 $I(t) = 2{,}0\,\text{A} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\text{s}} \cdot t\right)$ fließt.

4. Zeigen Sie, dass für eine langgestreckte luftgefüllte Zylinderspule gilt:
$$N \cdot \Phi = L \cdot I$$

5. Die beiden nebenstehenden Bilder zeigen den Stromanstieg für eine Spule beim Anlegen der gleichen äußeren Spannung U_B.
In einem Fall enthält die Spule einen Eisenkern, im anderen Fall nicht.
Ordnen Sie die Bilder diesen beiden Fällen zu und begründen Sie ihre Auswahl.



6. An eine Spule mit der Induktivität $L = 30\,\text{H}$ und dem ohmschen Widerstand $R = 150\,\Omega$ wird die Gleichspannung $U_0 = 12\,\text{V}$ gelegt.

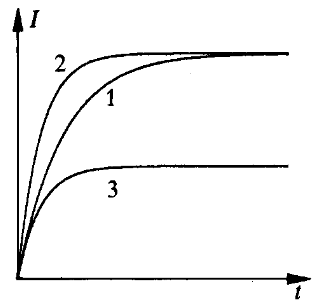
6.1 Berechnen Sie die Stromstärke im stationären Fall (d.h. für $t \to \infty$).

6.2 Berechnen Sie die Ableitung der Stromstärke zum Zeitpunkt des Einschaltens $(t = 0)$.

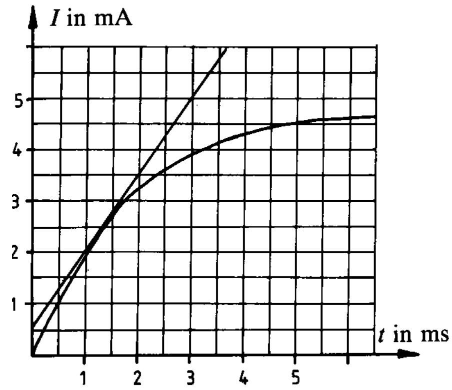
6.3 Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse ein $t - I -$ Diagramm, das den Anstieg der Stromstärke in der ersten halben Sekunde nach dem Einschalten zeigt.
Zeitachse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 0{,}05\,\text{s}$ Stromachse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 10\,\text{mA}$

6.4 Geben Sie für einen beliebigen Zeitpunkt t des Stromanstiegs den Zusammenhang zwischen U_0, U_{ind}, R und I an.

7. Die nebenstehende Abbildung zeigt die $t - I -$ Kurven für den Einschaltvorgang bei den Spulen (1), (2) und (3).
Die angelegte Spannung U_0 ist jeweils gleich.
Vergleichen Sie für die Spulen (1) und (2) sowie (1) und (3) jeweils Induktivität und ohmschen Widerstand.



8.0 An eine Spule wird die Gleichspannung $U_B = 10\,V$ angelegt. Durch Messung ergibt sich das nebenstehende $t - I - \text{Diagramm}$. Die Stromstärken, die man für die folgenden Berechnungen benötigt sind aus dem Diagramm abzulesen.



8.1 Begründen Sie, warum die Stromstärke nicht sofort ihren maximalen Wert von $I_{max} = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,A$ erreicht. Berechnen Sie den ohmschen Widerstand R_0 der Spule.

8.2 Welche Beziehung besteht zwischen der angelegten Spannung U_B, der momentanen Induktionsspannung U_{ind}, der Momentanstromstärke I und dem ohmschen Widerstand R_0?

Berechnen Sie U_{ind} für $t = 0\,s$; $t = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,s$ und $t = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,s$.

8.3 Berechnen Sie die Induktivität L der Spule unter Verwendung der im Diagramm für $t = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\,s$ eingezeichneten Tangente.

Herleitung einer Funktion für den Einschaltvorgang. Es gilt:

$$I(t)=\frac{U(t)}{R}=\frac{U_0+U_i(t)}{R}=\frac{U_0-L\cdot\dot{I}(t)}{R}=\frac{U_0}{R}-\frac{L}{R}\cdot\dot{I}(t)=I_0-\frac{L}{R}\cdot\dot{I}(t)$$

$$I=I_0-\frac{L}{R}\cdot\dot{I}(t)$$

$$I=I_0-\frac{L}{R}\cdot\frac{dI}{dt}$$

$$I-I_0=-\frac{L}{R}\cdot\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{R}{L}dt=\frac{dI}{I_0-I}$$

$$\int_0^t\frac{R}{L}dt=\int_0^I\frac{dI}{I_0-I}$$

$$\frac{R}{L}\left[t\right]_0^t=\left[-\ln\left(I_0-I\right)\right]_0^I$$

$$\frac{R}{L}\cdot t=-\left(\ln\left(I_0-I\right)-\ln\left(I_0\right)\right)$$

$$-\frac{R}{L}\cdot t=\ln\left(\frac{I_0-I}{I_0}\right)$$

$$e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=\frac{I_0-I}{I_0}$$

$$I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=I_0-I$$

$$I=I_0-I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

$$I(t)=I_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$$ Stromverlauf beim Einschaltvorgang

$$I(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$ Stromverlauf beim Ausschaltvorgang