12.12 Selbstinduktion - Lösung

Aufgaben

1. Gegeben ist eine Spule mit $N = 6000$ Windungen, der Länge $\ell = 15\,\text{cm}$ und der Querschnittsfläche $A = 20\,\text{cm}^2$. Berechnen Sie die Induktivität L.

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A}{\ell} = \frac{6000^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 0{,}0020\,\text{m}^2}{0{,}15\,\text{m}} \approx 0{,}60\,\text{H}$$

2. Gegeben ist eine Spule mit der Induktivität $L = 630\,\text{H}$. Sie wird von einem Strom der Stärke $I_1 = 50\,\text{mA}$ durchflossen, der in der Zeit $\Delta t = 2{,}0\,\text{s}$ auf die Stärke $I_2 = 100\,\text{mA}$ linear ansteigt. Berechnen Sie den Betrag der in dieser Zeit in der Spule auftretenden Induktionsspannung.

$$U_{ind} = -L \cdot \dot{I} = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = -L \cdot \frac{I_2 - I_1}{\Delta t} = -630\,\text{H} \cdot \frac{0{,}1\,\text{A} - 0{,}05\,\text{A}}{2{,}0\,\text{s}} = -15{,}75\,\text{V} \approx -16\,\text{V}$$

$$|U_{ind}| = 16\,\text{V}$$

3.0 In einem Stromkreis befindet sich eine Spule der Induktivität $L = 0{,}60\,\text{H}$. Berechnen Sie den Betrag der in ihr induzierten Spannung zum Zeitpunkt $t = 1{,}0\,\text{s}$, wenn im Stromkreis ein veränderlicher Strom der Stromstärke

3.1 $I(t) = 2{,}0\,\frac{\text{A}}{\text{s}} \cdot t$ fließt.

$$U_i(t) = -L\dot{I} = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad U_i(1{,}0\,\text{s}) = -0{,}60\,\text{H} \cdot 2{,}0\,\tfrac{\text{A}}{\text{s}} = -1{,}2\,\text{V} \quad \Rightarrow \quad |U_i(1{,}0\,\text{s})| = 1{,}2\,\text{V}$$

3.2 $I(t) = 2{,}0\,\text{A} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\text{s}} \cdot t\right)$ fließt.

$$U_i(t) = -L\dot{I} = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -0{,}60\,\text{H} \cdot 2{,}0\,\text{A} \cdot 2\pi\,\tfrac{1}{\text{s}} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{\text{s}} \cdot t\right)$$

$$U_i(1{,}0\,\text{s}) = -0{,}60\,\text{H} \cdot 2{,}0\,\text{A} \cdot 2\pi\,\tfrac{1}{\text{s}} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{\text{s}} \cdot 1{,}0\,\text{s}\right) \approx -7{,}5\,\text{V} \quad \Rightarrow \quad |U_i(1{,}0\,\text{s})| = 7{,}5\,\text{V}$$

4. Zeigen Sie, dass für eine langgestreckte luftgefüllte Zylinderspule gilt:

$$N \cdot \Phi = L \cdot I$$

Es gilt:

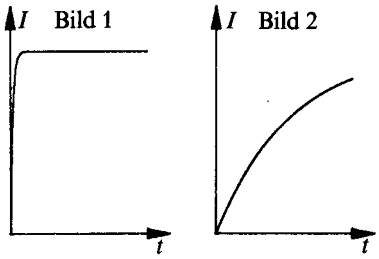
$$\Phi = AB$$

$$\Phi = A\mu_0\mu_r \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I \qquad | \cdot N$$

$$N \cdot \Phi = \underbrace{A\mu_0\mu_r \cdot \frac{N^2}{\ell}}_{L} \cdot I$$

$$\Rightarrow N \cdot \Phi = L \cdot I$$

5. Die beiden nebenstehenden Bilder zeigen den Stromanstieg für eine Spule beim Anlegen der gleichen äußeren Spannung U_B.
In einem Fall enthält die Spule einen Eisenkern, im anderen Fall nicht.
Ordnen Sie die Bilder diesen beiden Fällen zu und begründen Sie ihre Auswahl.



$$I(t)=\frac{U(t)}{R}=\frac{U_0+U_i(t)}{R}=\frac{U_0-L\cdot\dot{I}(t)}{R}=\frac{U_0}{R}-\frac{L}{R}\cdot\dot{I}(t)=I_0-\frac{L}{R}\cdot\dot{I}(t)=I_0-\frac{L}{R}\cdot\frac{dI(t)}{dt}$$

Zum Zeitpunkt $t=0$ gilt: $I(0)=I_0-\frac{L}{R}\cdot\frac{dI(0)}{dt}=0 \Rightarrow I_0=\frac{L}{R}\cdot\underbrace{\frac{dI(0)}{dt}}_{\text{Steigung der Tangente im Ursprung}} \Rightarrow L=\frac{I_0R}{\frac{dI(0)}{dt}}$

Im Bild 1 erfolgt der Stromanstieg sehr rasch, also ist die Induktivität der Spule klein: **ohne Eisenkern**
Im Bild 2 erfolgt der Stromanstieg langsamer, die Induktivität der Spule ist groß: **mit Eisenkern**

6. An eine Spule mit der Induktivität $L=30\,H$ und dem ohmschen Widerstand $R=150\,\Omega$ wird die Gleichspannung $U_0=12\,V$ gelegt.

6.1 Berechnen Sie die Stromstärke im stationären Fall (d.h. für $t\to\infty$).

$$I(t)=\frac{U(t)}{R}=\frac{U_0+U_i(t)}{R}=\frac{U_0-L\cdot\dot{I}(t)}{R}=\frac{U_0}{R}-\frac{L}{R}\cdot\underbrace{\dot{I}(t)}_{=0\text{ für } t\to\infty}=I_0$$

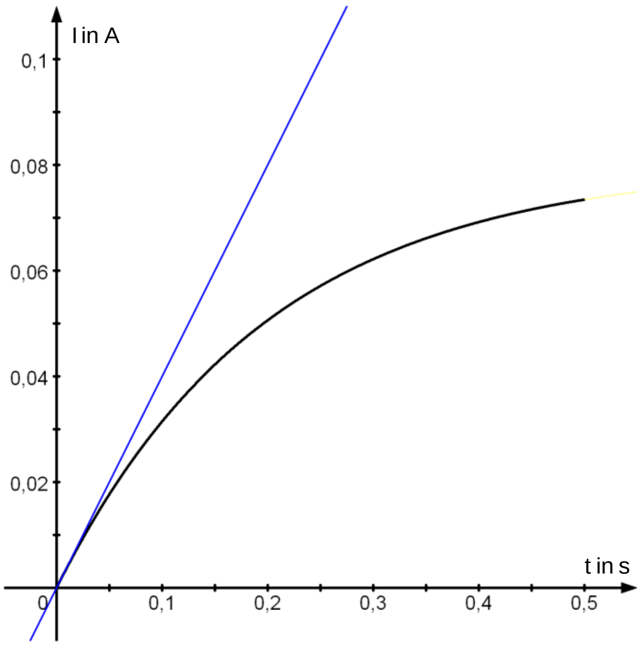
$$\Rightarrow I_0=\frac{U_0}{R}=\frac{12\,V}{150\,\Omega}=80\,mA$$

6.2 Berechnen Sie die Ableitung der Stromstärke zum Zeitpunkt des Einschaltens $(t=0)$.

Zum Zeitpunkt $t=0$ gilt:

$$I(0)=I_0-\frac{L}{R}\cdot\frac{dI(0)}{dt}=0 \Rightarrow I_0=\frac{L}{R}\cdot\frac{dI(0)}{dt} \Rightarrow \frac{dI(0)}{dt}=\frac{I_0\cdot R}{L}=\frac{0{,}08\,A\cdot150\,\Omega}{30\,H}=0{,}40\,\frac{A}{s}$$

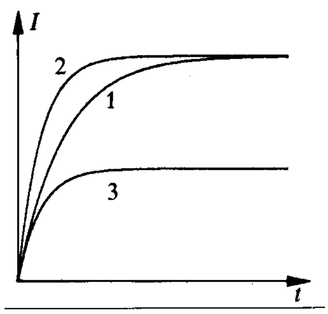
6.3 Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse ein $t-I-$Diagramm, das den Anstieg der Stromstärke in der ersten halben Sekunde nach dem Einschalten zeigt.
Zeitachse: $1\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 0,05\,\text{s}$ Stromachse: $1\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 10\,\text{mA}$



6.4 Geben Sie für einen beliebigen Zeitpunkt t des Stromanstiegs den Zusammenhang zwischen U_0, U_{ind}, R und I an.

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0 + U_i(t)}{R}$$

7. Die nebenstehende Abbildung zeigt die $t-I-$Kurven für den Einschaltvorgang bei den Spulen (1), (2) und (3).
Die angelegte Spannung U_0 ist jeweils gleich.
Vergleichen Sie für die Spulen (1) und (2) sowie (1) und (3) jeweils Induktivität und ohmschen Widerstand.



1 und 2:
Beide haben den gleichen ohmschen Widerstand da beide die gleiche Stromstärke erreichen.

Es gilt: $I(0) = I_0 - \frac{L}{R} \cdot \frac{dI(0)}{dt} = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{L}{R} \cdot \underbrace{\frac{dI(0)}{dt}}_{\text{Steigung der Tangente im Ursprung}} \Rightarrow L = \frac{I_0 R}{\frac{dI(0)}{dt}}$

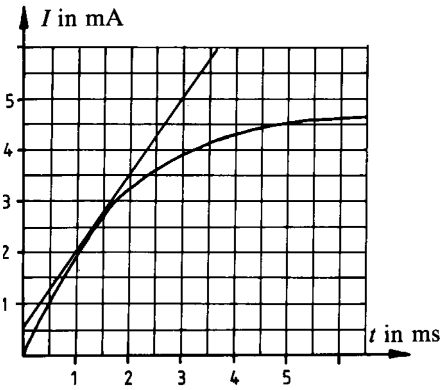
I_0 und R sind konstant, lässt man dt auch konstant, so gilt: $dI_2(0) > dI_1(0)$
$\Rightarrow L_2 < L_1$

1 und 3:
3 hat den doppelten ohmschen Widerstand wie Spule 1. Da beide die gleiche

Tangentensteigung im Ursprung haben, haben sie auch die gleiche Induktivität.

$$\dot{I}(0) = \frac{U_0}{R}$$

8.0 An eine Spule wird die Gleichspannung $U_B = 10\,V$ angelegt. Durch Messung ergibt sich das nebenstehende $t-I-$Diagramm. Die Stromstärken, die man für die folgenden Berechnungen benötigt sind aus dem Diagramm abzulesen.



8.1 Begründen Sie, warum die Stromstärke nicht sofort ihren maximalen Wert von $I_{max} = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,A$ erreicht. Berechnen Sie den ohmschen Widerstand R_0 der Spule.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10\,V}{5 \cdot 10^{-3}\,A} = 2{,}0\,k\Omega$$

8.2 Welche Beziehung besteht zwischen der angelegten Spannung U_B, der momentanen Induktionsspannung U_{ind}, der Momentanstromstärke I und dem ohmschen Widerstand R_0?

Berechnen Sie U_{ind} für $t = 0\,s$; $t = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,s$ und $t = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,s$.

$$I(t) = \frac{U(t)}{R_0} = \frac{U_B + U_i(t)}{R_0}$$

8.3 Berechnen Sie die Induktivität L der Spule unter Verwendung der im Diagramm für $t = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\,s$ eingezeichneten Tangente.

$$I(t) = \frac{U_B - L \cdot \dot{I}(t)}{R} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{U_B - R \cdot I(t)}{\dot{I}(t)}$$

$$L = \frac{U_B - R \cdot I(t)}{\frac{\Delta I}{\Delta t}} = \frac{10\,V - 2{,}0 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,A}{\frac{5{,}0 \cdot 10^{-3}\,A - 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,A}{3{,}0 \cdot 10^{-3}\,s - 31{,}25 \cdot 10^{-3}\,s}} = 3{,}5\,H$$