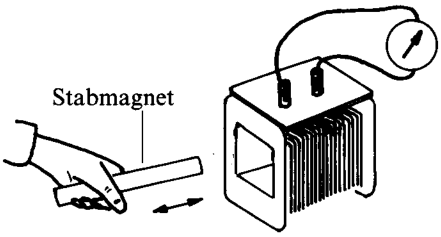
12.11 Die elektromagnetische Induktion

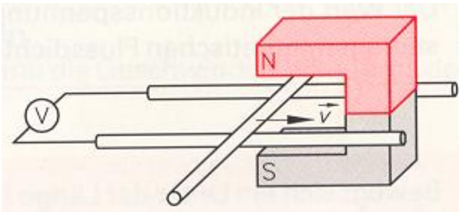
Ein Magnet wird einer Spule angenähert. Während der Annäherung ist an dem angeschlossenen Messgerät ein elektrischer Strom (Induktionsstrom) beobachtbar. Beim Entfernen des Magneten auf dem gleichen Wege fließt ebenfalls ein Strom, allerdings in entgegengesetzter Richtung.
Wird der Magnet nicht bewegt, so fließt kein el. Strom.



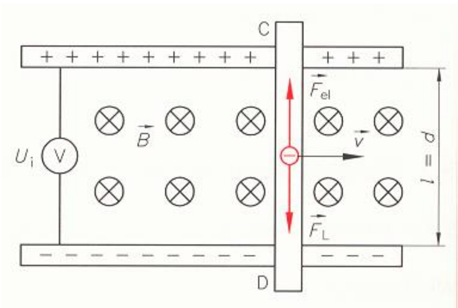
Um uns darüber klar zu werden wie dieser Strom zustande kommt betrachten wir zunächst nur einen Leiter im homogenen Magnetfeld.

1. Fall: Gleichförmig bewegter Leiter im homogenen Magnetfeld

Ein Metallstab wird senkrecht zu den Feldlinien eines homogenen magnetischen Feldes bewegt. Ein empfindliches Spannungsmessgerät zeigt während der Bewegung des Leiters eine Spannung an. Bleibt der Leiter stehen hat man keine Spannung mehr. Dreht der Leiter seine Bewegungsrichtung um, so ändert sich auch die Polarität der Spannung.



Erklärung: Bewegt man einen geraden Leiter in der dargestellten Weise in das Magnetfeld, so werden sämtliche Leitungselektronen, die sich in diesem Leiterstück befinden, mit dem Leiter mitbewegt. Da die Leiterbewegung senkrecht zum äußeren Magnetfeld erfolgt, erfahren diese „mitbewegten" Ladungen (nach der UVW-Regel) Lorentzkräfte in Richtung D (Leiterrichtung). Somit entsteht bei D ein Elektronenüberschuss, bei C ein Elektronenmangel. Mit dieser Ladungsverschiebung entsteht ein elektrisches Feld (über das Spannungsmessgerät findet kein Ladungstransport statt). Die bewegten Leiterelektronen unterliegen nun zusätzlich einer elektrischen Feldkraft, die in Richtung C wirkt. Nach sehr kurzer Zeit (etwa 10^{-12} s) sind die beiden Kräfte im Gleichgewicht, und es findet keine weitere Ladungsverschiebung mehr statt.



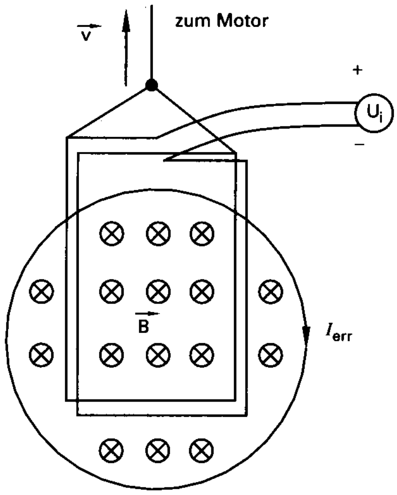
Während der Bewegung des Leiters zeigt das Spannungsmessgerät eine Spannung an, die sogenannte *Induktionsspannung* U_i. Die Polarität der Induktionsspannung ändert sich mit dem Richtungssinn der Bewegung und der Richtung der magnetischen Flussdichte.
Auf ein frei bewegliches Elektron des Leiters herrscht somit nach sehr kurzer Zeit ein Kräftegleichgewicht.

$$F_{el} = F_L$$
$$eE = evB$$
$$\frac{|U_i|}{\ell} = vB$$
$$\boxed{|U_i| = \ell vB}$$

ℓ: Leiterlänge, die sich im Magnetfeld befindet.
Bewegt sich ein Leiter der Länge ℓ mit der konstanten Geschwindigkeit vom Betrag v senkrecht zu den magnetischen Feldlinien in einem zeitlich und räumlich konstanten

Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$, so kann an seinen Enden die Induktionsspannung $|U_i| = \ell \cdot v \cdot B$ nachgewiesen werden.

Experimentelle Überprüfung der Gleichung:



In einer Zylinderspule $\left(N_{Sp} = 16000; \ell_{Sp} = 0{,}48\,\mathrm{m}\right)$ fließt ein konstanter Spulenstrom $I_{err} = 75\,\mathrm{mA}$. Senkrecht zum Vektor der magnetischen Flussdichte wird eine Spule $\left(N_i = 500; \ell_i = 5{,}0\,\mathrm{cm}\right)$ mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 1{,}0\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$ bewegt.
Berechung der Spannung, die in <u>einem</u> Leiterstück der Induktionsspule induziert wird.

$$|U_i|^* = v \cdot \ell_i \cdot B = v \cdot \ell_i \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_{err} \cdot N_{Sp}}{\ell_{Sp}}$$

$$|U_i|^* = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot \frac{75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} \cdot 16000}{0{,}48\,\mathrm{m}}$$

$$|U_i|^* = 1{,}6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{V}$$

Bei der Durchführung des Versuchs erhält man über den Messverstärker einen Spannungswert von $80\,\mu\mathrm{V}$. Diese Abweichung lässt sich dadurch erklären, dass in jedem einzelnen Leiterstück der Induktionsspule, die aus 500 Windungen besteht, die Spannung $|U_i|^*$ induziert wird. Diese Teilspannungen addieren sich zur Gesamtspannung:

$$|U_i| = N_i \cdot |U_i|^* = 500 \cdot 0{,}16\,\mu\mathrm{V} = 80\,\mu\mathrm{V}$$

Damit ist die Gleichung auch experimentell nachgewiesen.
Zudem gilt nun:

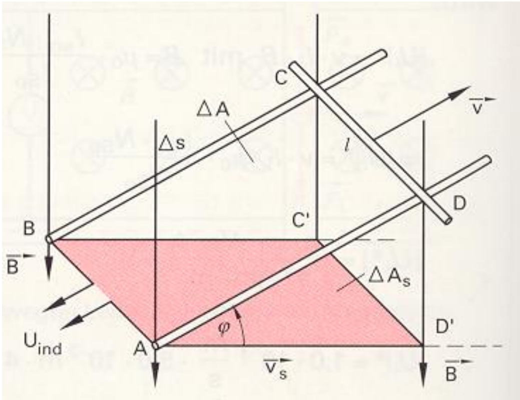
$$|U_i| = N_i \cdot \ell \cdot v \cdot B$$

<u>*Verallgemeinerung der gewonnen Beziehungen*</u>:
Bei einer gleichförmigen Bewegung des Leiters kann die Geschwindigkeit v durch den Quotienten $\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$ ersetzt werden.

$$|U_i| = N_i \cdot \ell \cdot v \cdot B = N_i \cdot \ell \cdot \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| \cdot B = N_i \cdot \left|\frac{\Delta s \cdot \ell}{\Delta t}\right| \cdot B = N_i \cdot \left|\frac{\Delta A}{\Delta t}\right| \cdot B \overset{\Delta t \to 0}{=} N_i \cdot \left|\frac{dA}{dt}\right| \cdot B = N_i \cdot \left|\dot{A}(t)\right| \cdot B$$

Bei der Bewegung eines Leiters im homogenen Magnetfeld ist die Induktionsspannung direkt proportional zur zeitlichen Änderung der vom Leiter überstrichenen Fläche.
$\left(\Delta s \cdot \ell \text{ ist die im Zeitraum } \Delta t \text{ vom Leiter der Länge } \ell \text{ überstrichene Fläche } \Delta A\right)$
Diese Gleichung beinhaltet noch die Bedingung, dass die Bewegung des Leiters senkrecht zur Richtung der magnetischen Feldlinien erfolgt.

Verschiebt man den Leiter schräg zu den vertikalen Feldlinien auf der schiefen Ebene ABCD nach oben, so bildet seine konstante Geschwindigkeit den Winkel ρ mit der Ebene $ABC'D'$, die senkrecht zu den magnetischen Feldlinien steht. Die Geschwindigkeitskomponente in der Ebene $ABC'D'$ beträgt:



$$v_s = v \cdot \cos\rho$$

Der Leiter überstreicht in der Zeit Δt die Fläche $\Delta A = \ell \cdot \Delta s$.

Für die Induktionsspannung ist aber nur die Flächenänderung $\Delta A_s = \ell \cdot \Delta s \cdot \cos\rho = \Delta A \cdot \cos\rho$ bedeutsam. Somit folgt:

$$|U_i| = B \cdot \left|\frac{\Delta A_s}{\Delta t}\right| = B \cdot \left|\frac{\Delta A}{\Delta t} \cdot \cos\rho\right|$$

Gibt man noch zusätzlich die Bedingung auf, dass der Leiter mit konstanter Geschwindigkeit bewegt wird, so muss der Differenzenquotient $\frac{\Delta A_s}{\Delta t}$ durch den Differentialquotienten $\frac{dA_s(t)}{dt} = \dot{A}_s(t)$ ersetzt werden.

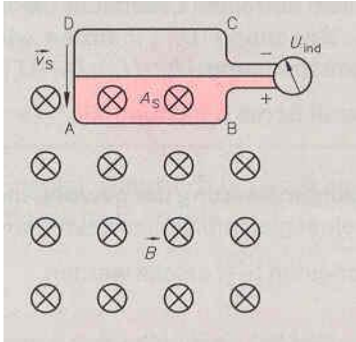
$\left(\text{Es gilt}: \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA(t)}{dt} = \dot{A}(t)\right)$

$$|U_i| = B \cdot \left|\dot{A}_s\right|$$

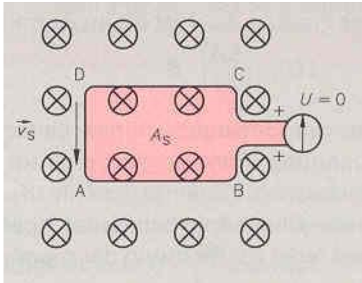
Anzumerken ist, dass die Induktionsspannung nun nicht mehr konstant sondern eine Funktion der Zeit ist. Wie bei der physikalischen Größe Geschwindigkeit muss auch bei der Induktionsspannung sauber zwischen Mittelwert und Momentanwert unterschieden werden.

Beispiel zur Induktion:

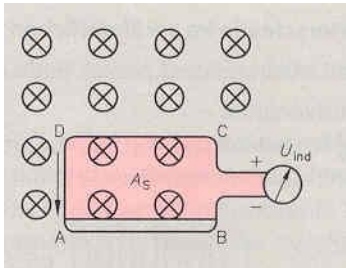
a) Man schiebt die Leiterschleife ABCD senkrecht zu den Feldlinien in das homogenen Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$. Die im Teilstück AB induzierte Spannung wird vom Spannungsmessgerät solange angezeigt, bis auch CD in das Feld eintaucht. Da die von den magnetischen Feldlinien senkrecht durchsetzte Fläche wächst, gilt: $\dot{A}_s(t) > 0$
Erfolgt die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, so ist U_i konstant.



b) Schiebt man die Leiterschleife weiter, so werden in CD ebenso Elektronen nach links verschoben, wie in AB. Man registriert die Spannung Null, solange man die ganz ins homogene Feld getauchte Schleife senkrecht zu den Feldlinien verschiebt. Da sich die von den magnetischen Feldlinien senkrecht durchsetzte Fläche nicht ändert, gilt:
$\dot{A}_s(t) = 0$



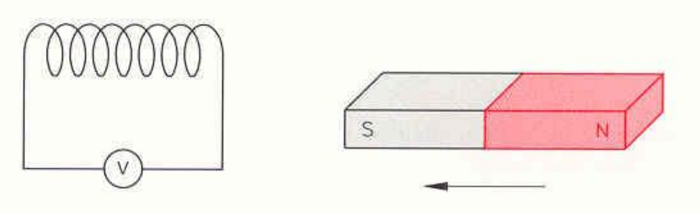
c) Wenn das Leiterstück AB unten das Feld verlässt, bleibt nur noch die in CD induzierte Spannung. Das Instrument schlägt so lange entgegengesetzt zu a) aus, bis auch das Leiterstück CD das Magnetfeld nach unten verlässt. Bis zu diesem Zeitpunkt nimmt die von den magnetischen Feldlinien durchsetzte Fläche ab.
Es gilt: $\dot{A}_s(t) < 0$



Insgesamt gilt:

$$|U_i(t)| = N_i \cdot |\dot{A}_s(t)| \cdot B$$

2. Fall: Leiterschleife im veränderlichen Magnetfeld einer langen Spule
Grundversuch: Ein Magnetstab wird in eine Zylinderspule eingeführt, deren Enden mit einem Spannungsmessgerät verbunden sind.



Beobachtung: Man erhält auch hier an den Enden der Spule eine Induktionsspannung.

In mehreren Experimenten wird nun der Zusammenhang zwischen der an den Enden einer Spule (Induktionsspule) induzierten Spannung und dem variablen Magnetfeld untersucht.
Versuchsbeschreibung: Im Inneren einer langgestreckten Spule (Feldspule) befindet sich eine zweite Spule (Induktionsspule), deren Enden an ein empfindliches Spannungsmessgerät angeschlossen sind. Die Induktionsspule befindet sich ganz im Inneren der Feldspule. Die Feldspule ist an eine Spannungsquelle angeschlossen, deren Ausgangsspannung veränderlich ist (Funktionsgenerator). Die Stromstärke im Kreis der Feldspule kann an einem Messgerät abgelesen werden.
Vorversuch: Der Strom in der Feldspule ändert sich linear. Für die Stromstärke gilt:

$$I_{Sp}(t) = k \cdot t \text{ mit einer konstanten k; } [k] = \tfrac{A}{s}; \; k = \tfrac{\Delta I}{\Delta t} \text{ (Steigungsdreieck!)}$$

Somit folgt für die magnetische Flussdichte im Inneren der Feldspule:

$$B(t) = \mu_0 \cdot \frac{N_{sp} \cdot I_{Sp}(t)}{\ell_{Sp}} = \mu_0 \cdot \frac{N_{sp} \cdot k}{\ell_{Sp}} \cdot t$$

Das Magnetfeld ist somit eine lineare Funktion der Zeit.
Beobachtung: Man erhält an den Enden der Induktionsspule eine zeitlich konstante Induktionsspannung, deren Abhängigkeit von den anderen Größen im Folgenden untersucht wird.

Untersuchung der Induktionsspannung $|U_i|$ in einer festen Leiterschleife bei einem veränderlichen Magnetfeld.
Man vermutet, dass die Induktionsspannung $|U_i|$ von der zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte, der Windungszahl und Querschnittsfläche der Induktionsspule abhängt. Eine Abhängigkeit von der Länge der Induktionsspule liegt nicht vor, wenn diese vollständig von dem magnetischen Feldlinien durchsetzt wird, was für die folgenden Versuche vorausgesetzt wird.

Versuch 1: Untersuchung der Abhängigkeit der zeitlich konstanten Induktionsspannung von der zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte in der felderregenden Spule.
Für die magnetische Flussdichte einer Spule und ihre zeitliche Änderung gilt:

$$B(t) = \mu_0 \cdot \frac{N_{sp} \cdot I_{Sp}(t)}{\ell_{Sp}} \;\Rightarrow\; \dot{B}(t) = \mu_0 \cdot \frac{N_{sp}}{\ell_{Sp}} \cdot \dot{I}_{Sp}(t) \;\Rightarrow\; \dot{B}(t) \sim \dot{I}_{Sp}(t)$$

Die Änderung der magnetischen Flussdichte erfolgt durch eine lineare Änderung der Stromstärke in der Spule. Bei linearen Funktionen ist die Steigung konstant, der Differentialquotient darf durch den Differenzenquotient ersetzt werden.

$$\dot{B}(t) = \frac{\Delta B}{\Delta t} \text{ und } \dot{B}(t) \sim \frac{\Delta I_{Sp}}{\Delta t}$$

Mit Hilfe eines Funktionsgenerators kann die an der Feldspule anliegende Spannung und damit die Stromstärke in der Feldspule linear geändert werden. Für unterschiedliche Anstiegsgeschwindigkeiten der Spannung wird die Zeit gemessen, in der die Stromstärke um $50\,\text{mA}$ steigt.

$\frac{\Delta I_{Sp}}{\Delta t}$ in $\frac{\text{mA}}{\text{s}}$	10	4,0	2,6
$\lvert U_i\rvert$ in μV	75	30	20
$\frac{\lvert U_i\rvert\cdot\Delta t}{\Delta I_{Sp}}$ in $\frac{\text{mVs}}{\text{A}}$	7,5	7,5	7,7

Im Rahmen der Messgenauigkeit ist der Quotient $\frac{\lvert U_i\rvert\cdot\Delta t}{\Delta I_{Sp}}$ konstant.

$$\lvert U_i\rvert \sim \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \qquad (1)$$

(Die Änderung der magnetischen Flussdichte kann negativ sein)

Versuch 2: Untersuchung der zeitlich konstanten Induktionsspannung $\lvert U_i\rvert$ in Abhängigkeit von der Windungszahl N_i $\left(\ell_i, A_i \text{ und } \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \text{ bleiben konstant}\right)$.

N_i	75	150	300
$\lvert U_i\rvert$ in μV	6,4	12,6	25,2
$\frac{\lvert U_i\rvert}{N_i}$ in $10^{-8}\,\text{V}$	8,50	8,40	8,40

Der Quotient $\frac{\lvert U_i\rvert}{N_i}$ ist im Rahmen der Messgenauigkeit konstant.

$$\lvert U_i\rvert \sim N_i \qquad (2)$$

Versuch 3: Untersuchung der Induktionsspannung $\lvert U_i\rvert$ in Abhängigkeit der Windungsfläche A_i $\left(\ell_i, N_i \text{ und } \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \text{ bleiben konstant}\right)$.

d in cm	2,6	3,3	4,1
A_i in cm^2	5,3	8,6	13
$\lvert U_i\rvert$ in μV	14	22	37
$\frac{\lvert U_i\rvert}{A_i}$ in $\frac{\mu\text{V}}{\text{cm}^2}$	2,64	2,56	2,85

Der Quotient $\frac{\lvert U_i\rvert}{A_i}$ ist im Rahmen der Messgenauigkeit konstant.

$$\lvert U_i\rvert \sim A_i \qquad (3)$$

(Eine graphische Auswertung liefert eine Ursprungshalbgerade!)

Zusammenfassung:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & |U_i| \sim \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \\ (2) & |U_i| \sim N_i \\ (3) & |U_i| \sim A_i\end{array}\right\} \Rightarrow \quad |U_i| \sim N_i \cdot A_i \cdot \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \quad \Rightarrow \quad |U_i| = k \cdot N_i \cdot A_i \cdot \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte einer Messung erhält man für die Proportionalitätskonstante: $k = 1$

Insgesamt folgt aus den Versuchen:

$$|U_i| = N_i \cdot A_i \cdot \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|$$

Lässt man hier beliebige Änderungen der magnetischen Flussdichte zu, so muss man den Differenzenquotienten durch den Differenzialquotienten ersetzen. Für den Momentanwert der induzierten Spannung folgt damit:

$$|U_i(t)| = N_i \cdot A_i \cdot \left|\dot{B}(t)\right|$$

Zusammenfassung der beiden Fälle

1. Fall: $|U_i(t)| = N_i \cdot \left|\dot{A}_s(t)\right| \cdot B$

2. Fall: $|U_i(t)| = N_i \cdot A_i \cdot \left|\dot{B}(t)\right|$

In beiden Fällen spielt die zeitliche Änderung des Produktes $A \cdot B$ die entscheidende Rolle. Zur Erinnerung: Der magnetische Fluss Φ ist definiert als Skalarprodukt der Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$.

$$\Phi = \vec{A} \circ \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\left(\sphericalangle(A;B)\right) = A_s \cdot B$$

Verwendet man diesen Zusammenhang und berechnet die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses nach der Produktregel, so folgt:

$$\dot{\Phi} = \left(A_s \cdot B\right)^{\bullet} = \dot{A}_s \cdot B + A_s \cdot \dot{B}$$

Im 1. Fall ist $B = \text{konst.}$, also $\dot{B} = 0$. Somit folgt:

$$|U_i(t)| = N_i \cdot \left|\dot{A}_s(t)\right| \cdot B = N_i \cdot \left|\dot{A}_s(t) \cdot B\right| = N_i \cdot \left|\dot{\Phi}(t)\right|$$

Im 2. Fall ist $A = \text{konst.}$, also $\dot{A} = 0$. Somit folgt:

$$|U_i(t)| = N_i \cdot A_i \cdot \left|\dot{B}(t)\right| = N_i \cdot \left|A_i \cdot \dot{B}(t)\right| = N_i \cdot \left|\dot{\Phi}(t)\right|$$

Beide Fälle führen somit auf die Beziehung:

$$\left|U_i(t)\right| = N_i \cdot \left|\dot{\Phi}(t)\right|$$

Da diese Form des Induktionsgesetzes noch keine Aussage über die Polarität der Induktionsspannung macht bedient man sich der Lenz´schen Regel: Hier fehlt noch der entsprechende Versuch!!

Die Induktionsspannung ist so gepolt, dass der von der Induktionsspannung hervorgerufenen Induktionsstrom der Ursache des Induktionsvorganges entgegenwirken kann.

Somit folgt für die Induktionsspannung:

$$\boxed{U_i(t) = -N_i \cdot \dot{\Phi}(t)}$$ **Faradays Induktionsgesetz**

Induktion

Das Induktionsgesetz lautet in der differenziellen Schreibweise:

$$U_{ind} = -N_i \cdot \dot{\Phi}$$

Φ steht dabei für den magnetischen Fluss (in $Vs = Wb$ (Weber)) durch die Induktionsspule mit der Windungszahl N_i .
(Die Induktionsspule ist die Spule, in der die Induktionsspannung U_{ind} induziert wird.)

In einem Modell kann der magnetische Fluss als die Anzahl der Feldlinien aufgefasst werden, die durch die Induktionsspule gehen.

$\dot{\Phi}$ bedeutet $\frac{d\Phi}{dt}$, d. h. die zeitliche Ableitung der Funktion $\Phi(t)$.

$\dot{\Phi}$ gibt damit Auskunft über die <u>Änderung des magnetischen Flusses</u> durch die Induktionsspule. Im Modell entspricht dies also der Änderung der Feldlinienzahl pro Zeit durch die Induktionsspule.

Das Induktionsgesetz sagt damit aus, dass
- nur eine <u>Änderung der Feldlinienzahl</u> durch die Induktionsspule eine Spannung induziert,
- die induzierte Spannung um so größer ist, je größer die <u>Änderung der Feldlinienzahl</u> durch die Induktionsspule ist,
- die Induktionsspannung der Ursache ihrer Entstehung immer entgegen gerichtet ist (das Minuszeichen im Induktionsgesetz!) = **Lenzsche Regel**!

Der magnetische Fluss Φ berechnet sich nach der Formel: $\boxed{\Phi = \vec{B} \circ \vec{A}}$

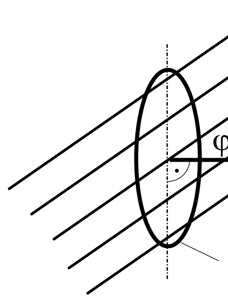
Wobei $\vec{B} \circ \vec{A}$ das Skalarprodukt der beiden Vektoren

$\vec{B}$: magnetische Flussdichte in $\frac{Vs}{m^2}$ (nach der Modellvorstellung entspricht B der Anzahl der Feldlinien pro Einheitsfläche) und

$\vec{A}$: Flächenvektor, der von der Induktionsspule eingeschlossen (mit Feldlinien durchsetzten) Fläche. Der Betrag von $\vec{A}$ entspricht dabei der Flächenmaßzahl im m^2, die Richtung von $\vec{A}$ steht dabei stets senkrecht auf der Fläche A.

Das Skalarprodukt berechnet sich nach der Formel $\Phi = \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{A}\right| \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{B};\vec{A})\right)$

Der magnetische Fluss Φ (die Anzahl der Feldlinien) ist dann maximal, wenn die Vektoren $\vec{B}$ und $\vec{A}$ parallel sind, (d. h. die Feldlinien senkrecht durch die Induktionsfläche verlaufen) bzw. Null, wenn die Vektoren $\vec{B}$ und $\vec{A}$ senkrecht aufeinander stehen (d. h. wenn die Feldlinien in der Ebene der Induktionsfläche liegen).



Einheitenbetrachtung: $[\Phi] = \frac{Vs}{m^2} \cdot m^2 = Vs = Wb$

Setzt man die Formel $\Phi = \vec{B} \circ \vec{A}$ in die Induktionsformel $U_{ind} = -N_i \cdot \dot{\Phi}$ ein so erhält man:

$$U_i = -N_i \cdot \frac{d\left(\vec{B} \circ \vec{A}\right)}{dt}$$

Stehen die Vektoren $\vec{B}$ und $\vec{A}$ parallel zueinander (d. h. treten die Feldlinien senkrecht durch die Induktionsspule), vereinfacht sich die Formel:

$$U_{ind} = -N_i \cdot \frac{d(B \cdot A)}{dt}$$

Um eine Induktionsspannung zu erhalten sind damit zwei Möglichkeiten gegeben:

- B verändert sich, A bleibt konstant:

  Transformatorprinzip $\qquad U_{ind} = -N_i \cdot A \cdot \frac{dB}{dt}$

- A verändert sich, B bleibt konstant:

  Generatorprinzip $\qquad U_{ind} = -N_i \cdot B \cdot \frac{dA}{dt}$

Für nicht lineare Änderungen von A oder B gelten obige Formeln. Als Ergebnis erhält man eine Funktion $U_{ind}(t)$

Für lineare Änderungen von A oder B wird d durch Δ ersetzt. Als Ergebnis erhält man einen konstanten (zeitlich unabhängigen) Wert U_{ind}.

Beispiele zum Induktionsgesetz

1. **A = konst.**

B ändert sich — **linear** | **nicht linear**

Die magnetische Flussdichte einer stromdurchflossenen Spule (der Feldspule) berechnet sich nach der Formel: $B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot J$

N/l = Windungsdichte der Feldspule
J = Stromstärke durch die Feldspule

bzw. $\Delta B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot \Delta J$ $\quad$ $B(t) = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot J(t)$

Aus dem allgemeinen Induktionsgesetz $U_{ind} = -N_i \cdot \frac{d(B \cdot A)}{dt}$ ergibt sich dann je nach Sachverhalt

linear:

$$U_{ind} = -N_i \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\boxed{U_{ind} = -N_i \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot \frac{\Delta J}{\Delta t}}$$

nicht linear:

$$U_{ind}(t) = -N_i \cdot A \cdot \frac{dB(t)}{dt}$$

$$\boxed{U_{ind}(t) = -N_i \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot \frac{dJ(t)}{dt}}$$

2. **B = konst.**

A ändert sich — **linear** | **nicht linear**

Beispiele: Drahtbügel wird mit v = konst. aus einem homogenen Magnetfeld bewegt | Induktionsspule dreht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im homogenen Magnetfeld

linear:

$$\Delta A = b \cdot \Delta s$$

$$U_{ind} = -N_i \cdot B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$U_{ind} = -N_i \cdot B \cdot b \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\boxed{U_{ind} = -N_i \cdot B \cdot b \cdot v}$$

nicht linear:

Drehwinkel $\varphi = \omega \cdot t$

$$\Phi(\varphi) = \vec{B} \circ \vec{A}(\varphi) = B \cdot A \cdot \cos\varphi$$

$$\Phi(t) = B \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$U_{ind}(t) = -N_i \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

$$U_{ind}(t) = -N_i \cdot B \cdot A \cdot \frac{d(\cos(\omega \cdot t))}{dt}$$

$$\boxed{U_{ind}(t) = N_i \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

Für die magnetische Flussdichte B der Feldspule muss u. U. noch die oben angeführte Formel: $B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot J$ verwendet werden.