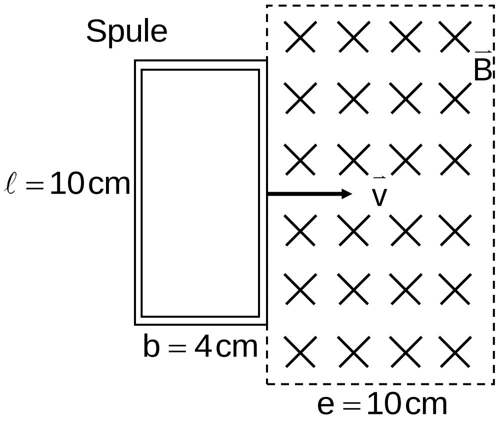
Aufgaben zur Induktion

1.0 Eine flache rechteckige Spule mit 50 Windungen und dem Widerstand $50\,\Omega$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $2{,}0\,\frac{cm}{s}$ durch das scharf begrenzte homogene Magnetfeld der magnetischen Flussdichte $1{,}5\,T$ bewegt.
Die Spulenenden sind kurz geschlossen.
Zum Zeitpunkt t_1 sei die Spule gerade vollständig in das Magnetfeld eingetaucht, zum Zeitpunkt t_2 beginnt die Spule das Magnetfeld zu verlassen und zum Zeitpunkt t_3 habe die Spule das Magnetfeld vollständig verlassen.



1.1 Geben Sie ohne weitere Rechnung die Zeitpunkte t_1, t_2 und t_3 an.

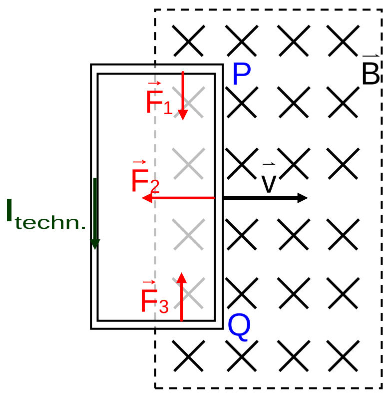
$t_1 = 2{,}0\,s$, $t_2 = 5{,}0\,s$, $t_3 = 7{,}0\,s$

1.2 Während die Spule in das Magnetfeld eindringt $(0\,s \le t \le t_1)$, wird in ihr die Spannung $U_i = -N_i B \ell v$ induziert. Leiten Sie U_i aus dem Induktionsgesetz her und berechnen Sie dessen Wert.

Beim Hineinziehen der Leiterschleife in das Magnetfeld bleibt die Kraftflussdichte B konstant. Die sich im Magnetfeld befindendende und von der Leiterschleife eingeschlossene Fläche ändert sich mit der Zeit t.
Zieht man die Leiterschleife um die Strecke $s = v \cdot t$ in das Feld, so gilt für die sich im Feld befindende Fläche:
$A(t) = \ell \cdot s = \ell \cdot v \cdot t$
Für den Kraftfluss folgt:
$$\Phi(t) = A(t) \cdot B = B \cdot \ell \cdot v \cdot t \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}(t) = B \cdot \ell \cdot v$$
Für die induzierte Spannung gilt nach dem Faraday´schen Induktionsgesetz:
$$U_i(t) = -N_i \cdot \dot{\Phi}(t) = -N_i \cdot B \cdot \ell \cdot v = -50 \cdot 1{,}5\,T \cdot 0{,}1\,m \cdot 0{,}02\,\tfrac{m}{s} = -0{,}15\,V$$

1.3 Die Spule sei nun $2{,}0\,cm$ in das Feld eingedrungen. Tragen Sie alle an der bewegten Spule angreifenden Kräfte (ohne Gewichtskraft) sowie die Stromrichtung in eine Skizze ein, die auch die Spule und das Magnetfeld enthält.

Mit der Leiterschleife werden Elektronen mitbewegt. Da auf sie die Lorentzkraft $\vec{F} = e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ wirkt werden sie im Leiterstück ℓ zur Stelle Q transportiert. Zwischen P und Q entsteht somit die Spannung $|U_i| = N_i \cdot B \cdot \ell \cdot v$. Somit wirkt das Leiterstück ℓ als Spannungsquelle (P ist Pluspol, Q ist Minuspol), welche den Strom in der eingezeichneten Richtung fließen lässt.
Die zu $\vec{v}$ parallelen Leiterstücke liefern keinen Beitrag.



1.4 Um die Spule in das Feld hineinzuziehen ist eine Kraft notwendig. Leiten Sie diese Kraft allgemein her und berechnen Sie ihren Wert.

Auf ein stromdurchflossenes Leiterstück der Länge ℓ wirkt im Magnetfeld die Kraft $\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}$.
Da $\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$ heben sie sich in ihrer Gesamtwirkung auf.
Übrig bleibt die Kraft $\vec{F}_2$, die entgegen der Bewegungsrichtung der Leiterschleife wirkt.
Um nun die Leiterschleife weiterhin mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen zu können muss eine Zugkraft $\vec{F}_Z = -\vec{F}_2$ aufgebracht werden (die Summe aller wirkenden Kräfte muss Null sein).
Also gilt: $\vec{F}_Z = -N \cdot I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B} \;\Rightarrow\; F_Z = N \cdot I \cdot \ell \cdot B = \text{konst.}$ da I, ℓ, B konstant sind

$$F_Z = N \cdot I \cdot \ell \cdot B = N \cdot \frac{U_i}{R} \cdot \ell \cdot B = 50 \cdot \frac{0{,}15\,V}{50\,\Omega} \cdot 0{,}10\,m \cdot 1{,}5\,T = 2{,}3 \cdot 10^{-2}\,N$$

1.5 Zeigen Sie, dass für $t_1 \le t \le t_2$ gilt: $U_i = 0$

$B = \text{konst.}$
Da sich die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche A der Spule für $t_1 \le t \le t_2$ nicht ändert ist auch $A = \text{konst.}$

Somit ist auch $\Phi = AB = \text{konst.} \;\Rightarrow\; \dot{\Phi} = 0 \;\Rightarrow\; U_i = -N_i \cdot \dot{\Phi} = 0$

1.6 Zeigen Sie, dass für den magnetischen Fluss beim Herausziehen $(t_2 \le t \le t_3)$ der Spule aus dem Magnetfeld gilt: $\Phi(t) = B \cdot \ell \cdot (b - v \cdot t)$.
Berechnen Sie in diesem Fall den Wert der induzierten Spannung.

Beim Herausziehen der Leiterschleife bleibt die Kraftflussdichte B konstant. Die sich im Magnetfeld befindendende und von der Leiterschleife eingeschlossene Fläche ändert sich mit der Zeit t.
Zieht man die Leiterschleife um die Strecke $s = v \cdot t$ aus dem Feld, so gilt für die im Feld verbleibende Fläche:
$A(t) = A_{Schleife} - \ell \cdot s = \ell \cdot b - \ell \cdot v \cdot t = \ell \cdot (b - v \cdot t)$
Für den Kraftfluss folgt:

$$\Phi(t) = A(t) \cdot B = B \cdot \ell \cdot (b - v \cdot t) \;\Rightarrow\; \dot{\Phi} = -B \cdot \ell \cdot v \;\Rightarrow\; U_i = -N_i \cdot (-B \cdot \ell \cdot v) = N_i \cdot B \cdot \ell \cdot v$$

$$U_i = 50 \cdot 1{,}5\,T \cdot 0{,}1\,m \cdot 0{,}02\,\tfrac{m}{s} = 0{,}15\,V$$

1.7 Was folgt für die induzierte Spannung, wenn sich die Spule nun komplett außerhalb des Magnetfeldes bewegt $(t_3 \le t \le 8{,}0\,s)$

Da außerhalb des Magnetfeldes $B = 0$ ist folgt: $\Phi = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\Phi} = 0 \;\Rightarrow\; U_i = 0$

1.8 Zeichnen Sie das $t - I -$Diagramm für die Spulenstromstärke ab dem Eindringen der Spule in das Magnetfeld für die Zeitdauer von $8{,}0\,s$.

Für die Spulenstromstärke I gilt:

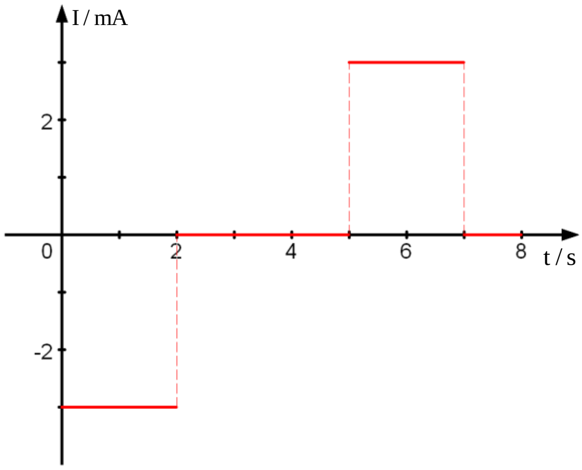
$$R = \frac{U}{I} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_i}{R} \qquad \left(I = \frac{-N_i \cdot B \cdot \ell \cdot v}{R} \right)$$

$0\,s \le t \le t_1: \quad I = -3{,}0\,mA$

$t_1 \le t \le t_2: \quad I = 0$

$t_2 \le t \le t_3: \quad I = 3{,}0\,mA$

$t_3 \le t \le 8{,}0\,s: \quad I = 0$



2. Mit einem Dreiecksgenerator ist es möglich, die Stromstärke in einer lang gestreckten Spule (120 Windungen, $50\,cm$ Länge) proportional zur Zeit ansteigen zu lassen. Nach $4{,}0\,s$ ist die Änderung der Stromstärke $0{,}80\,A$. Im Inneren der langen Spule befindet sich koaxial eine Induktionsspule (150 Windungen, $12\,cm^2$ Querschnittsfläche), die mit einem Spannungsmesser verbunden ist.
Berechnen Sie den Betrag der an den Enden der Induktionsspule induzierten Spannung

$$U_i = -N_i \cdot \dot{\Phi} = -N_i \cdot (\dot{AB}) = -N_i \cdot (\dot{A}B + A\dot{B}) \overset{A=\text{konst}}{=} -N_i \cdot A \cdot \dot{B}$$

mit $B(t) = \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I(t)$ folgt:

$$U_i = -N_i \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot \dot{I}(t) = -N_i \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot \frac{dI}{dt} = -N_i \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$U_i = -150 \cdot 12 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\tfrac{Vs}{Am} \cdot \frac{120}{0{,}5\,m} \cdot \frac{0{,}80\,A}{4\,s} \approx -1{,}1 \cdot 10^{-5}\,V$$

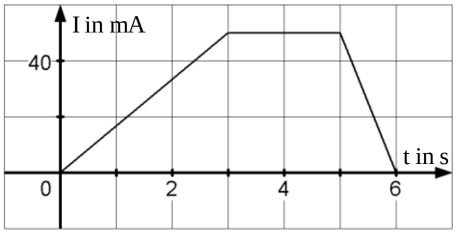
3. Das Magnetfeld einer lang gestreckten Spule hat die Flussdichte $3{,}1\,mT$. In ihm befindet sich eine Induktionsspule mit 100 Windungen und einer Fläche von $6{,}5\,cm^2$.
Berechnen Sie die mittlere induzierte Spannung beim Ausschalten des Feldspulenstromes, wenn die Achsen beider Spulen zusammenfallen und der Ausschaltvorgang eine hundertstel Sekunde dauert.

$$U_i = -N_i \cdot \dot{\Phi} = -N_i \cdot (\dot{AB}) = -N_i \cdot (\dot{A}\,B + A\,\dot{B}) \overset{A=konst}{=} -N_i \cdot A \cdot \dot{B} = -N_i \cdot A \cdot \frac{dB}{dt} = -N_i \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$U_i = -N_i \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -N_i \cdot A \cdot \frac{B_n - B_0}{t_n - t_0} \underset{t_0=0}{\overset{B_n=0}{=}} -N_i \cdot A \cdot \frac{-B_0}{t_n} = N_i \cdot A \cdot \frac{B_0}{t_n}$$

$$U_i = 100 \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot \frac{3{,}1 \cdot 10^{-3}\,T}{1{,}0 \cdot 10^{-2}\,s} \approx 20\,mV$$

4.0 An die Enden einer lang gestreckten Feldspule (2600 Windungen, $1{,}0\,m$ Länge) wird eine Spannung angelegt und so verändert, dass die Stromstärke I in der Feldspule den zeitlichen Verlauf aus dem Bild hat.
In der Feldspule liegt koaxial eine zweite Spule (100 Windungen, $20{,}25\,cm^2$ Querschnittsfläche).



4.1 An den Enden der zweiten Spule liegt ein „flinkes“ Spannungsmessgerät. Welchen Spannungsverlauf zeigt es an?
Zeichnen Sie diesen für $0 \le t \le 6{,}0\,s$.

$$U_i = -N_i \cdot \dot{\Phi} = -N_i \cdot (\dot{AB}) = -N_i \cdot (\dot{A}\,B + A\,\dot{B}) \overset{A=konst}{=} -N_i \cdot A \cdot \dot{B}$$

mit $B(t) = \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I(t)$ folgt:

$$U_i = -N_i \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot \dot{I}(t) = -N_i \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot \frac{dI}{dt} = -N_i \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = -N_i \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot \frac{I_n - I_v}{t_n - t_v}$$

1. Bereich: $0 \le t \le 3s$

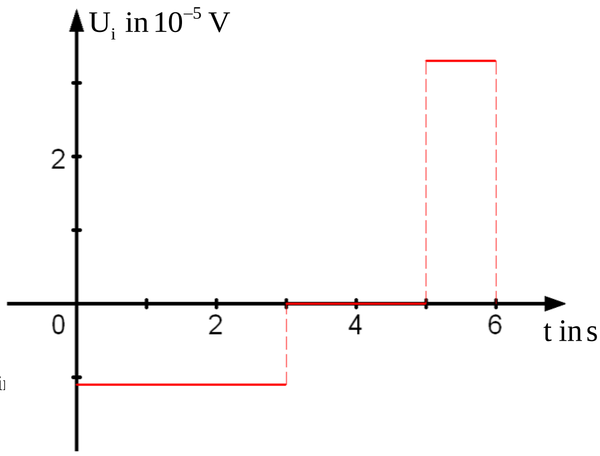
$$U_i = -100 \cdot 20{,}25 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\tfrac{Vs}{Am} \cdot \frac{2600}{1{,}0\,m} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}\,A - 0}{3s - 0} \approx -1{,}1 \cdot 10^{-5}\,V$$

2. Bereich: $3s \le t \le 5s$

Da $I_v = I_n$ ist $\dot{I}(t) = 0 \;\Rightarrow\; U_i = 0$

3. Bereich: $5s \le t \le 6s$

$$U_i = -100 \cdot 20{,}25 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\tfrac{Vs}{Am} \cdot \frac{2600}{1{,}0\,m} \cdot \frac{0 - 50 \cdot 10^{-3}\,A}{6s - 5s} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-5}\,V$$



4.2 Wie ändert sich der Spannungsverlauf, wenn die zweite Spule 150 Windungen und $13{,}5\,\mathrm{cm}^2$ Querschnittsfläche hat?

1. Bereich: $0 \le t \le 3\mathrm{s}$

$$U_i = -150 \cdot 13{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\tfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot \frac{2600}{1{,}0\,\mathrm{m}} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} - 0}{3\mathrm{s} - 0} \approx -1{,}1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{V}$$

2. Bereich: $3\mathrm{s} \le t \le 5\mathrm{s}$

Da $I_v = I_n$ ist $\dot{I}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U_i = 0$

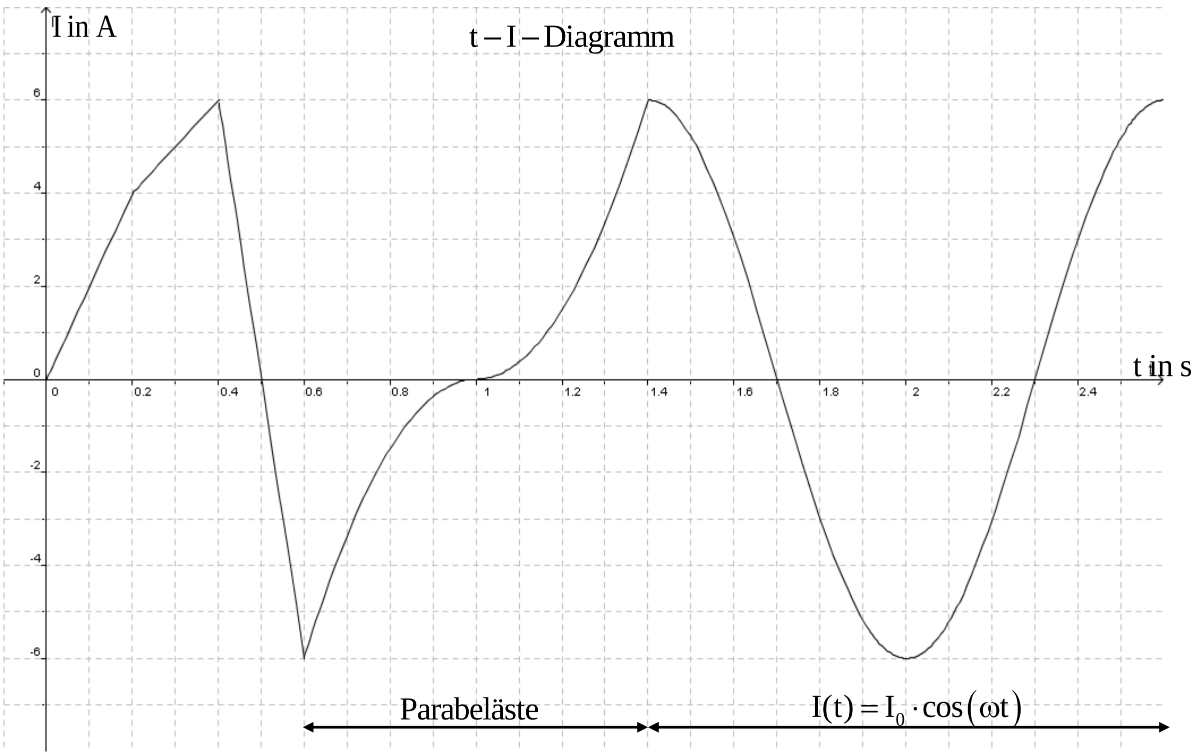
3. Bereich: $5\mathrm{s} \le t \le 6\mathrm{s}$

$$U_i = -150 \cdot 13{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\tfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot \frac{2600}{1{,}0\,\mathrm{m}} \cdot \frac{0 - 50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}}{6\mathrm{s} - 5\mathrm{s}} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{V}$$

Insgesamt: Da die Anzahl der Wicklungen $\tfrac{3}{2}$ des alten Wertes beträgt und die Fläche $\tfrac{2}{3}$ des alten Wertes, ändert sich die induzierte Spannung nicht.

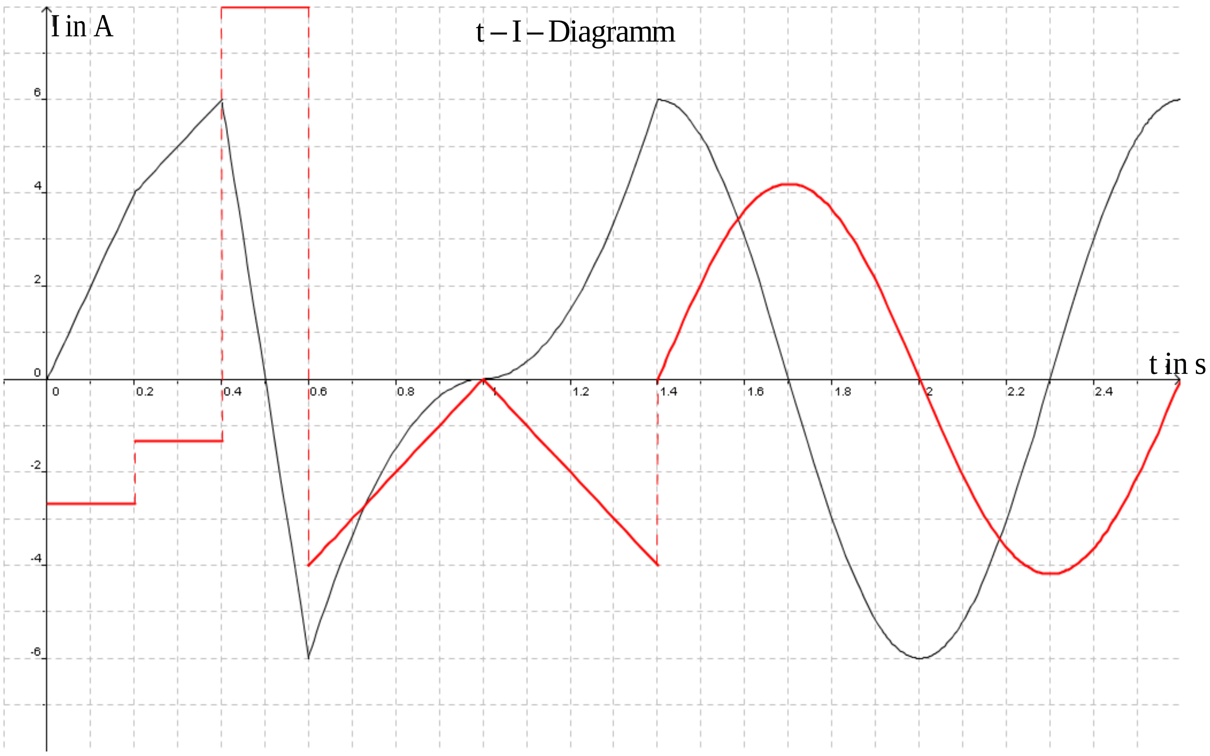
5.0 Gegeben ist der zeitliche Verlauf der Stromstärke durch eine Feldspule mit der Windungsdichte $30.000\,\tfrac{1}{\mathrm{m}}$. In der Feldspule ist achsenparallel eine Induktionsspule mit $8{,}0\,\mathrm{cm}$ Durchmesser und 1200 Windungen ruhend angeordnet.

5.1 Zeichne qualitativ in das vorliegende t-I-Diagramm den zeitlichen Verlauf der in der Induktionsspule erzeugten Induktionsspannung ein.



Es gilt: $B = \mu_o \cdot \dfrac{N_F}{\ell_F} \cdot I$

$$U_{ind} = -N_i \cdot \dot{\Phi} = -N_i \cdot (\dot{A}B + A\dot{B}) = -N_i A \dot{B} = -\underbrace{N_i A \mu_0 \frac{N_F}{\ell_F}}_{=k\ (=\text{konst.})} \cdot \dot{I} = -k \cdot \dot{I}$$



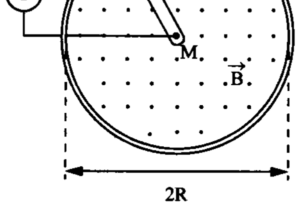
5.2 Berechne die Induktionsspannung im Zeitintervall $0 < t < 0{,}2\,\text{s}$.

$$U_{ind} = -N_i A \mu_0 \frac{N_F}{\ell_F} \cdot \dot{I} = -N_i A \mu_0 \frac{N_F}{\ell_F} \cdot \frac{dI}{dt} = -N_i A \mu_0 \frac{N_F}{\ell_F} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$U_{ind} = -1200 \cdot (0{,}04\,\text{m})^2 \pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\tfrac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 30000\,\tfrac{1}{\text{m}} \cdot \frac{4{,}0\,\text{A}}{0{,}2\,\text{s}} \approx -4{,}5\,\text{V}$$

Lk 1997/I

3.0 Ein Zeiger aus Metall dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um M (vgl. Skizze). Seine Spitze S gleitet auf einem Metallring mit dem Radius R. Zwischen der Metallachse des Zeigers und dem Ring ist ein Spannungsmessgerät geschaltet. Ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte B, das senkrecht zur Ringebene gerichtet ist, durchflutet den ganzen Ring.



3.1 Berechen Sie die Fläche ΔA, die der Zeiger bei einer Drehung um den Winkel $\Delta\alpha$ überstreicht, und mit Hilfe des Induktionsgesetzes die dabei zwischen M und S induzierte Spannung.

Für die Fläche ΔA, die der Zeiger bei einer Drehung um den Winkel $\Delta\alpha$ (im Bogenmaß) überstreicht gilt:

$$\Delta A = R^2\pi\cdot\frac{\Delta\alpha}{2\pi} = \tfrac{1}{2}R^2\cdot\omega\cdot\Delta t \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta A}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}R^2\omega$$

Für den magnetischen Fluss gilt dann:

$$\Phi = AB \quad\Rightarrow\quad \dot{\Phi} = \dot{A}B + A\dot{B} \overset{B=\text{konst.}}{=} \dot{A}B = B\cdot\frac{dA}{dt} = B\cdot\frac{\Delta A}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}R^2\omega B$$

Nach dem Induktionsgesetz folgt:

$$U_i = -N_i\cdot\dot{\Phi} \overset{N_i=1}{=} -\tfrac{1}{2}R^2\omega B$$

3.2 Berechen Sie die Lorentzkraft auf ein Elektron im rotierenden Zeiger, das sich im Abstand r von M befindet.
Welche Arbeit wird von der Lorentzkraft verrichtet, wenn sie ein Elektron von M nach S bewegt? Berechnen Sie unter Verwendung dieser Arbeit den Betrag der zwischen M und S induzierten Spannung.

Da das Elektron um M mit dem Radius r und der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, gilt:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad\Rightarrow\quad v = \omega r$$

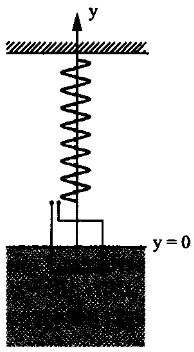
Somit folgt für die Lorentzkraft: $F_L = evB = e\omega rB$

$$W_L = \int_0^R F_L\,dr = \int_0^R e\omega Br\,dr = e\omega B\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^R = \tfrac{1}{2}e\omega BR^2$$

$U_i = \dfrac{W_L}{e} = \tfrac{1}{2}\omega BR^2$ (Stimmt vom Betrag her mit dem Ergebnis aus Aufgabe 3.1 überein.)

Lk 1999/I

3.0 Eine Spule mit quadratischen Querschnitt Kantenlänge $a = 5{,}0\,\text{cm}$ besitzt die Windungszahl $N = 10$. Sie hängt an einer Feder und taucht zur Hälfte in ein nur nach oben begrenztes homogenes Magnetfeld der Flussdichte $B = 0{,}10\,\text{T}$ ein. Befindet sich dieses Federpendel in der Ruhelage, so verläuft die Obergrenze des Magnetfeldbereichs durch die Spulenmitte. Die Feldlinien des Magnetfeldes stehen senkrecht auf der Zeichenebene, die Spulenachse ist immer parallel zu den Feldlinien.



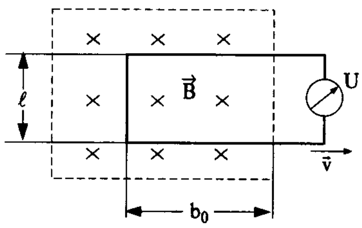
3.1 Die Spule wird um $2{,}5\,\text{cm}$ angehoben und zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ losgelassen. Sie vollführt danach annähernd eine ungedämpfte harmonische Schwingung mit der Periodendauer $T = 0{,}62\,\text{s}$. Geben Sie die zugehörige Zeit-Ort-Funktion $y(t)$ der Spulenmitte an und berechnen Sie den maximalen Geschwindigkeitsbetrag $|v_{max}|$.
Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Induktionsspannung $U_{ind}(t)$ zwischen den Enden der Spule und geben Sie den maximalen Spannungswert an.

3.2 Die Spule wird zu Beginn um mehr als $2{,}5\,\text{cm}$ angehoben; sie schwingt deshalb mit einer Amplitude $A > 2{,}5\,\text{cm}$. Skizzieren Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf der Induktionsspannung für $t \in [0; T]$.

3.3 Die Enden der Spulen werden nun kurzgeschlossen und es wird das gleiche Experiment wie in Teilaufgabe 3.1 durchgeführt. Beschreiben Sie die Bewegung der Spule und begründen Sie Ihre Antwort qualitativ.

1998/III

2.0 Eine rechteckige Leiterschleife (Seitenlänge ℓ) befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0\,s$ teilweise (Eintauchtiefe b_0) in einem scharf begrenzten, homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$. Sie wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ aus dieser Anfangsstellung (siehe Skizze) nach rechts ($\vec{v} \perp \vec{B}, \vec{v} \perp \vec{\ell}$) herausgezogen; dabei wird mit dem Voltmeter die Induktionsspannung gemessen. Der Betrag dieser Spannung wird mit U bezeichnet. Zum Zeitpunkt t_1 verlässt die Leiterschleife das Magnetfeld. Im Folgenden ist mechanische Reibung zu vernachlässigen.



2.1.0 Der magnetisch Fluss, der zum Zeitpunkt t die Leiterschleife durchsetzt, wird mit $\Phi(t)$ bezeichnet.

2.1.1 Zeigen Sie, dass gilt: $\Phi(t) = B \cdot \ell \cdot (b_0 - v \cdot t)$, wobei $0s \le t \le t_1$.

Beim Herausziehen der Leiterschleife bleibt die Kraftflussdichte B konstant. Die sich im Magnetfeld befindendende und von der Leiterschleife eingeschlossene Fläche ändert sich mit der Zeit t.

Zieht man die Leiterschleife um die Strecke $s = v \cdot t$ aus dem Feld, so gilt für die im Feld verbleibende Fläche:

$$A(t) = A_0 - \ell \cdot s = \ell \cdot b_0 - \ell \cdot v \cdot t = \ell \cdot (b_0 - v \cdot t)$$

Für den Kraftfluss folgt:

$$\Phi(t) = A(t) \cdot B = B \cdot \ell \cdot (b_0 - v \cdot t)$$

2.1.2 Bestätigen Sie ausgehend vom Induktionsgesetz und der Funktion $\Phi(t)$ aus 2.1.1, dass für die Spannung gilt: $U = B \cdot \ell \cdot v$.

mit $\Phi(t) = B \cdot \ell \cdot (b_0 - v \cdot t) \;\Rightarrow\; \dot{\Phi}(t) = B \cdot \ell \cdot (-v) = -B \cdot \ell \cdot v$

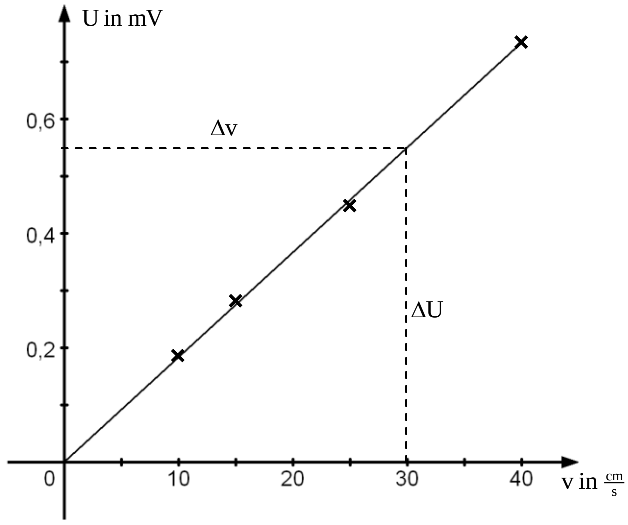
$$U_i(t) = -N_i \cdot \dot{\Phi}(t) \overset{N_i=1}{=} -B \cdot \ell \cdot (-v) = B \cdot \ell \cdot v$$

2.2.0 In einem Messversuch wird die Abhängigkeit der Spannung U vom Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v}$ überprüft. Für $\ell = 4{,}0\,cm$ ergibt sich folgende Messreihe:

Versuch Nr.	1	2	3	4
Geschwindigkeit v in $\frac{cm}{s}$	10	15	25	40
Spannung U in mV	0,18	0,28	0,44	0,73

2.2.1 Zeigen Sie durch grafische Auswertung der Messreihe, dass die Gleichung $U = k \cdot v$ gilt, wobei k eine Konstante ist.

$\left(\text{Massstab}: 5{,}0\,\frac{cm}{s} \mathrel{\widehat{=}} 1\,cm;\ 0{,}10\,mV \mathrel{\widehat{=}} 1\,cm\right)$



Im Rahmen der Mess- und Zeichengenauigkeit liegen die Punkte auf einer Ursprungshalbgeraden $\Rightarrow$ $U \sim v$ bzw. $U = k \cdot v$ $(k = \text{konst.})$

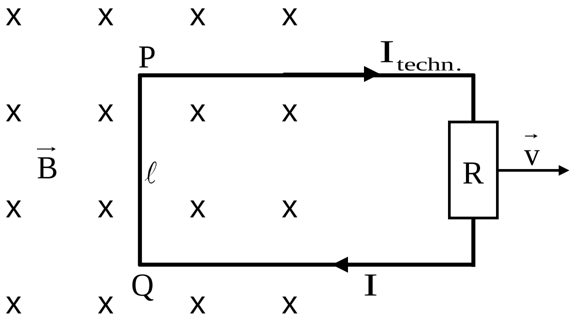
2.2.2 Ermitteln Sie aus dem Diagramm die Konstante k und berechnen Sie daraus den Betrag der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$.

Es gilt: $k = \frac{\Delta U}{\Delta v} = \frac{0{,}55 \cdot 10^{-3}\,V}{30 \cdot 10^{-2}\,\frac{m}{s}} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-3}\,\frac{Vs}{m}$

Mit $U = k \cdot v$ und $U_i = B \cdot \ell \cdot v$ folgt: $k \cdot v = B \cdot \ell \cdot v$ $\Rightarrow$ $B = \frac{k}{\ell} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-3}\,\frac{Vs}{m}}{4{,}0 \cdot 10^{-2}\,m} = 45\,mT$

2.3.0 Das Voltmeter wird nun entfernt und durch einen Widerstand ersetzt. Die geschlossene Leiterschleife besitzt nun einen Gesamtwiderstand R. Sie wird wiederum, wie in 2.0 beschrieben, aus dem Magnetfeld herausgezogen, dabei fließt in der Leiterschleife der Induktionsstrom I.

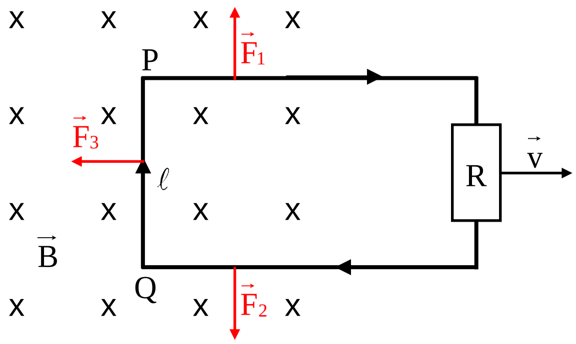
2.3.1 Erklären Sie anhand einer beschrifteten Skizze, welche die Orientierung der Flussdichte $\vec{B}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ enthält, das Zustandekommen des Induktionsstroms I. Tragen Sie in Ihre Skizze den Umlaufsinn des Induktionsstromes ein und begründen Sie diesen.



Mit der Leiterschleife werden Elektronen mitbewegt. Da auf sie die Lorentzkraft $\vec{F} = e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ wirkt werden sie im Leiterstück ℓ zur Stelle Q transportiert. Zwischen P und Q entsteht somit die Spannung $U_i = B \cdot \ell \cdot v$. Somit wirkt das Leiterstück ℓ als Spannungsquelle (P ist Pluspol, Q ist Minuspol), welche den Strom in der

eingezeichneten Richtung fließen lässt.
Die zu $\vec{v}$ parallelen Leiterstücke liefern keinen Beitrag.

2.3.2 Begründen Sie ohne Rechnung, dass zur Aufrechterhaltung der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ eine konstante Zugkraft $\vec{F}_Z$ auf die Leiterschleife wirken muss.



Auf ein stromdurchflossenes Leiterstück der Länge ℓ wirkt im Magnetfeld die Kraft $\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}$.
Da $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ heben sie sich in ihrer Gesamtwirkung auf.
Übrig bleibt die Kraft $\vec{F}_3$, die entgegen der Bewegungsrichtung der Leiterschleife wirkt.
Um nun die Leiterschleife weiterhin mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen zu können muss eine Zugkraft $\vec{F}_Z = -\vec{F}_3$ aufgebracht werden (die Summe aller wirkenden Kräfte muss Null sein).
Also gilt: $\vec{F}_Z = -I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B} \;\Rightarrow\; F_Z = I \cdot \ell \cdot B = \text{konst.}$ da I, ℓ, B konstant sind

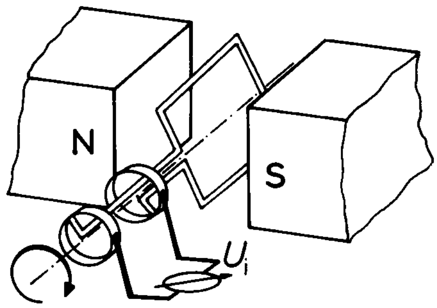
2.3.3 Zeigen Sie, durch allgemeine Herleitung, dass im Zeitintervall $[0\,\text{s}; t_1]$ für den Betrag der Zugkraft $\vec{F}_Z$ gilt:

$$F_Z = \frac{(\ell \cdot B)^2 \cdot v}{R}$$

Es gilt nach 2.3.2: $F_Z = I \cdot \ell \cdot B = \frac{U_i}{R} \cdot \ell \cdot B \overset{2.1.2}{=} \frac{B \cdot \ell \cdot v}{R} \cdot \ell \cdot B = \frac{(\ell \cdot B)^2 \cdot v}{R}$

Erzeugung sinusförmiger Wechselspannungen (Induktionsspannungen)

Eine rechteckige Spule mit N_i Windungen und der Fläche A_0 (siehe Skizze) wird mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ im homogenen Magnetfeld der Kraftflussdichte B gedreht. Zum Zeitpunkt $t = 0\,s$ sind Flächennormale der Spule und Feldlinien zueinander parallel.



a) Berechnen Sie aus den gegebenen Größen die induzierte Spannung $U_{ind}(t)$.

Für die wirksame Spulenfläche gilt: $A(t) = A_0 \cdot \cos\left(\omega t + \rho_0\right) \overset{\rho_0=0}{=} A_0 \cdot \cos\left(\omega t\right)$

$\vec{B} \,||\, \vec{A}$ (Flächennormale) dann gilt: $\rho_0 = 0$ ($\vec{B}$ steht senkrecht auf Spulenfläche)

$\vec{B} \perp \vec{A}$ (Flächennormale) dann gilt: $\rho_0 = \frac{\pi}{2}$ ($\vec{B}$ liegt in der Spulenfläche)

Ist $B = \text{konst.}$, dann folgt für den magnetischen Fluss:

$$\Phi = AB = A_0 B \cdot \cos\left(\omega t\right) \;\Rightarrow\; \dot{\Phi} = -A_0 B\omega \cdot \sin\left(\omega t\right)$$

Für die induzierte Spannung gilt dann:

$$U_i(t) = -N_i \cdot \dot{\Phi} = N_i A_0 B\omega \cdot \sin\left(\omega t\right) = N_i A_0 B \cdot \tfrac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\tfrac{2\pi}{T} t\right)$$

b) Zu welchen Zeitpunkten beträgt die induzierte Spannung $0\,V$? (Drücken Sie diese Zeiten durch T aus.)

$$U_i(t) = 0 \;\Rightarrow\; \sin\left(\tfrac{2\pi}{T} t\right) = 0 \;\Rightarrow\; \tfrac{2\pi}{T} t = n\pi \;\Rightarrow t_n = \tfrac{1}{2} nT \quad \left(n \in \mathbb{N}_0\right)$$

c) Zu welchen Zeitpunkten ist der Betrag der induzierten Spannung maximal? (Drücken Sie diese Zeiten durch T aus.)

$U_i(t) = N_i A_0 B \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ ist maximal $\left(U_{i_{max}} = N_i A_0 B \cdot \frac{2\pi}{T}\right)$, wenn:

$$\sin\left(\tfrac{2\pi}{T} t\right) = \pm 1 \;\Rightarrow\; \tfrac{2\pi}{T} t = \left(2n+1\right)\tfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow t_n = \left(\tfrac{1}{2} n + \tfrac{1}{4}\right) T \quad \left(n \in \mathbb{N}_0\right)$$

d) Berechnen Sie den Maximalwert U_0 der induzierten Spannung.

$$U_{i_{max}} = N_i A_0 B \cdot \tfrac{2\pi}{T} = U_0$$

e) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Spulenachse und den Feldlinien des Magnetfeldes, wenn die Momentanspannung gleich dem halben Maximalwert ist?

$$U_i(t) = N_i A_0 B\omega \cdot \sin\left(\tfrac{2\pi}{T} t\right) = \pm \tfrac{1}{2} U_{i_{max}} = \pm \tfrac{1}{2} N_i A_0 B\omega \;\Rightarrow\; \sin\left(\tfrac{2\pi}{T} t\right) = \pm \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = 30°$$

f) Welche Spannung wird zum Zeitpunkt $t = \frac{4}{5} T$ induziert?

$$U_i\left(\tfrac{4}{5} T\right) = N_i A_0 B\omega \cdot \sin\left(\tfrac{2\pi}{T} \cdot \tfrac{4}{5} T\right) = N_i A_0 B\omega \cdot \sin\left(\tfrac{8\pi}{5}\right) \approx -0{,}951 N_i A_0 B\omega = -0{,}951 U_{i_{max}}$$

g) Wie ändert sich der Scheitelwert der induzierten Spannung, wenn die Frequenz verdreifacht wird?

$$U_{i_{max}} = N_i A_0 B\omega = N_i A_0 B \cdot 2\pi f$$

Verdreifacht man die Frequenz f, so verdreifacht sich auch der Scheitelwert der induzierten Spannung.

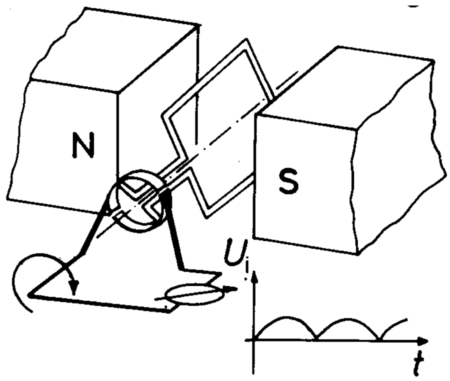
h) Welcher Schleifring stellt in der Skizze den Pluspol dar?

Der hintere Schleifring stellt den Pluspol dar!

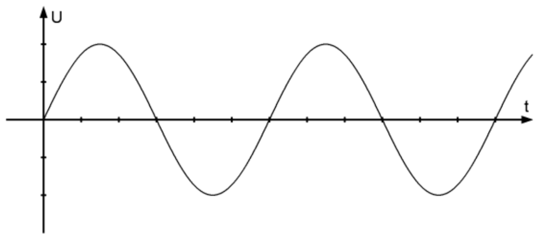
Beantworten Sie obige Fragen für den Fall, dass zum Zeitpunkt $t = 0\,s$ die Spulenachse um 30° gegen die Feldlinien geneigt ist.

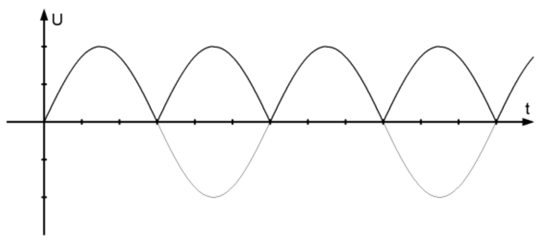
Für die Phasenverschiebung gilt: $\rho_0 = \frac{\pi}{6}$

Durch geeignete Gestaltung der Abgriffe an den Spulenenden (Kollektor) kann man einen sogenannten pulsierenden Gleichstrom erzeugen:



Für die elektrische Arbeit, die in der Zeit T im Wechselstromkreis verrichtet wird, gilt:





$$\dot{W}(t) = P(t) = U(t)\cdot I(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = U(t)\cdot I(t)$$

$$dW = U(t)\cdot I(t)\cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^W dW = \int_0^T U(t)\cdot I(t)dt$$

$$W = \int_0^T U(t)\cdot I(t)dt = \int_0^T U(t)\cdot \frac{U(t)}{R}dt =$$

$$= \frac{1}{R}\cdot\int_0^T \left(U_0\cdot\sin(\omega t)\right)^2 dt =$$

$$= \frac{U_0^2}{R}\cdot\int_0^T \sin^2(\omega t)dt =$$

$$= \frac{U_0^2}{R}\cdot\int_0^T \tfrac{1}{2}\left(1-\cos(2\omega t)\right)dt =$$

$$= \frac{U_0^2}{2R}\cdot\left[t - \tfrac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T =$$

$$= \frac{U_0^2}{2R}\cdot\left[T - \tfrac{1}{2\omega}\sin(\tfrac{4\pi}{T}T) - 0 + \tfrac{1}{2\omega}\sin(0)\right] = \frac{U_0^2}{2R}\cdot T$$

In einem Gleichstromkreis wird in der Zeit T dagegen die elektrische Arbeit

$$W = U \cdot I \cdot T = \frac{U^2}{R} \cdot T$$

verrichtet.

Wird nun in beiden Kreisen (Wechselstromkreis und Gleichstromkreis) die gleiche Arbeit verrichtet, so gilt:

$$\frac{U^2}{R} \cdot T = \frac{U_0^2}{2R} \cdot T$$

$$U^2 = \frac{U_0^2}{2}$$

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Man bezeichnet U_{eff} als Effektivwert einer Wechselspannung mit dem Scheitelwert U_0.

Analog gilt:

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Ein Wechselstrom mit dem Effektivwert I_{eff} verrichtet in der Zeit T die gleiche Stromarbeit wie ein Gleichstrom mit der Stromstärke I_0.

6.0 Eine Feldspule erzeugt eine magnetische Flussdichte von $10\,\text{mT}$. In ihr ist eine quadratische Induktionsspule mit 500 Windungen und einer Seitenlänge von $a = 5{,}0\,\text{cm}$ drehbar angeordnet. Sie rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Die Rotationsachse der Induktionsspule ist dabei senkrecht zu den magnetischen Feldlinien der Feldspule angeordnet. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ steht der Flächenvektor der Induktionsspule senkrecht zu den Feldlinien der Feldspule.

6.1 Leite eine Formel für den zeitlichen Verlauf der Induktionsspannung aus den in 6.0 angeführten Größen her.

Es gilt: $A(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t + \rho_0) = a^2 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -a^2 \cdot \sin(\omega t)$

$$\Phi(t) = A(t) \cdot B = -a^2 \cdot B \cdot \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}(t) = -a^2 B\omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$U_i(t) = -N_i \cdot \dot{\Phi}(t) = \underbrace{N_i a^2 B\omega}_{U_{i_{max}}} \cdot \cos(\omega t)$$

6.2 Berechne die erforderliche Frequenz der Induktionsspule damit eine Effektivspannung von $40\,\text{V}$ erzielt wird.

$$U_{eff} = \frac{U_{i\,max}}{\sqrt{2}} = \frac{N_i a^2 B\omega}{\sqrt{2}} = \frac{N_i a^2 B \cdot 2\pi f}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{eff}}{N_i a^2 B \cdot 2\pi}$$

$$f = \frac{\sqrt{2} \cdot 40\,\text{V}}{500 \cdot (0{,}05\,\text{m})^2 \cdot 0{,}01\,\text{T} \cdot 2\pi} \approx 7{,}2 \cdot 10^2\ \text{Hz}$$

Der Erdinduktor

Der Erdinduktor dient zur Bestimmung der magnetischen Flussdichte des Erdmagnetfeldes.

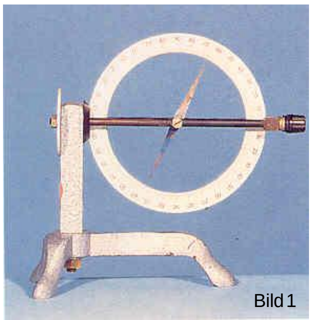
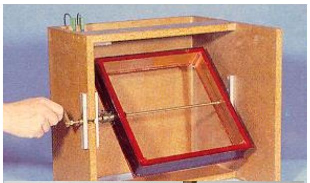


Bild 1



Um die Richtung der magnetischen Feldlinien auf der Erde zu bestimmen benützt man eine Magnetnadel *(Bild 1)*, mit der man zunächst die N-S-Richtung ermittelt. Dann kann diese Magnetnadel in die Vertikalebene gedreht werden. Sie ist dann drehbar um eine horizontale Achse, sodass sie den Winkel anzeigt, unter dem die Feldlinien gegen die Horizontale geneigt sind. Dieser Winkel wird Inklinationswinkel genannt; er beträgt in München 64°.

Die Messung der magnetischen Flussdichte wird mit einem Erdinduktor *(Bild 2)* durchgeführt, dessen drehbar gelagerte flache Spule 1250 Windungen und eine Spulenfläche von $0{,}093\,\mathrm{m}^2$ hat.

Nachdem die Spule ausgerichtet und in Rotation versetzt wurde, wird eine *Speicheroszilloskopaufnahme* gemacht.

a) In welche Himmelsrichtung ist die Rotationsachse des Erdinduktors zu orientieren, damit bei Drehung der Spule die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ des Erdmagnetfeldes bestimmt wird?
b) Bei welcher Spulenstellung wird die Scheitelspannung erreicht?
c) Berechnen Sie allgemein die magnetische Flussdichte des magnetischen Erdmagnetfeldes.
d) Berechnen Sie die Horizontal- und die Vertikalkomponente der magnetischen Flussdichte.