

12.9 Überlagerung von elektrischen und magnetischen Feldern

Bei der Bestimmung der spezifischen Ladung der Elektronen fand bereits eine Überlagerung von elektrischen und magnetischen Feldern statt, ohne zu einer gegenseitigen Störung zu führen. Dies führt zu dem Schluss, dass sich elektrische und magnetische Felder ohne gegenseitige Beeinflussung überlagern können. In einem Punkt des Raumes können die magnetische Flussdichte \vec{B} und die elektrische Feldstärke \vec{E} gleichzeitig nebeneinander bestehen.

Für die Gesamtkraft erhält man:

$$\vec{F}_{\text{Ges}} = \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{L}}$$

$$\vec{F}_{\text{Ges}} = q \cdot \vec{E} + q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F}_{\text{Ges}} = q \cdot [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})]$$

Geschwindigkeitsfilter (Wien-Filter)

Mit einem Geschwindigkeitsfilter lassen sich aus einem Teilchenstrahl Teilchen ausfiltern, die alle die gleiche Geschwindigkeit haben. Dazu durchläuft ein Ladungsträger eine Anordnung „gekreuzter elektrischer und magnetischer Felder“.

Bsp.: Elektronen unterschiedlicher

Geschwindigkeiten bewegen sich von links nach rechts in einer Anordnung gekreuzter el. und magn. Felder. Bei angegebener Polung des el. Feldes wirkt die elektrische Kraft \vec{F}_{el} nach unten. Die Lorentzkraft \vec{F}_{L} wirkt bei angegebener Magnetfeldrichtung nach oben. Damit das Elektron sich geradlinig durch das

Loch der Blende L bewegt muss die resultierende Gesamtkraft $\vec{F}_{\text{Ges}} = 0$ sein. Nach obiger Gleichung somit:

$$\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

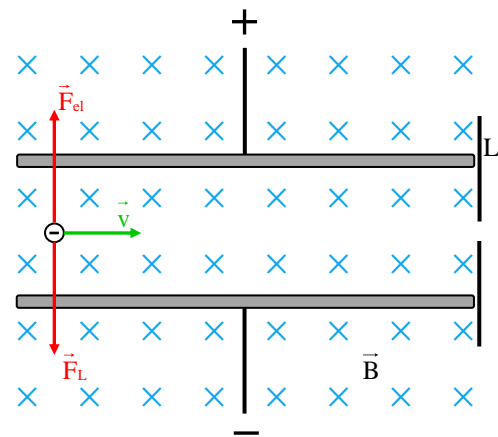
Betrachtet man die Beträge so folgt (wenn $\vec{v} \perp \vec{B}$):

$$E = v \cdot B$$

$$v = \frac{E}{B}$$

D. h. also, dass nur Elektronen mit der Geschwindigkeit $v = \frac{E}{B}$ durch das Loch der Blende L durchkommen.

Der Geschwindigkeitsfilter ist nicht nur für Elektronen sondern auch für beliebig geladene Teilchen verwendbar.



Massenspektrometer

Massenspektrometer (Massenspektrographen) dienen zur Trennung von Isotopen eines Nuklids, zu ihrer Massenbestimmung und zur Ermittlung des natürlichen Isotopenverhältnisses.

Das Prinzip eines einfachen Massenspektrometers wird an folgender Anordnung erläutert.

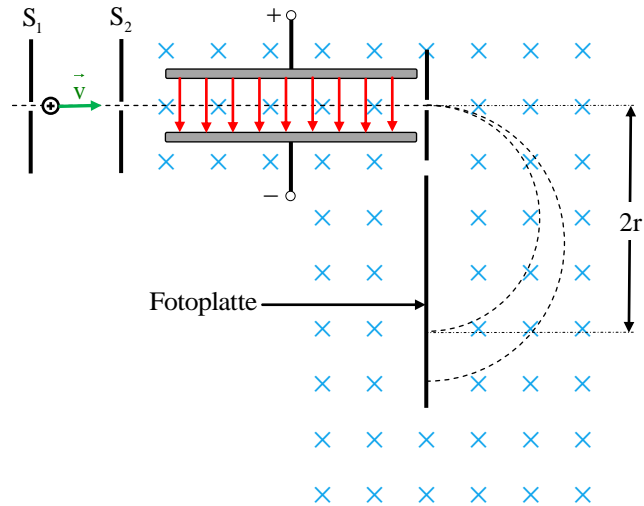
Die Isotope eines Nuklids werden zunächst ionisiert. Mit unterschiedlichen Anfangsgeschwindigkeiten werden sie in einem elektrischen Längsfeld, das vor der Blende S_1 liegt beschleunigt; dabei

erreichen Isotope gleicher Ladung wegen ihrer geringfügig unterschiedlichen Massen und Anfangsgeschwindigkeiten verschiedene Geschwindigkeiten. Mit den Blenden S_1 und S_2 werden die Ionen zu einem Strahl gebündelt und gelangen anschließend in einen Geschwindigkeitsfilter. Diesen können nur Ionen mit genau der Geschwindigkeit $v = \frac{E}{B}$ durchlaufen. Diese Ionen haben aber verschiedene Massen. Nach dem passieren des Filters wirkt auf diese nur noch die Lorentzkraft. Da diese Zentripetalkraft ist, werden Ionen gleicher Ladung und unterschiedlicher Massen auf Kreisbahnen mit verschiedenen Radien gezwungen. Für die Beträge der Kräfte gilt:

$$\begin{aligned}F_Z &= F_L \\m \frac{v^2}{r} &= qvB \\m \frac{v}{r} &= qB \quad \text{mit } v = \frac{E}{B} \\m \frac{E}{rB} &= qB \\m &= \frac{qB^2}{E} \cdot r\end{aligned}$$

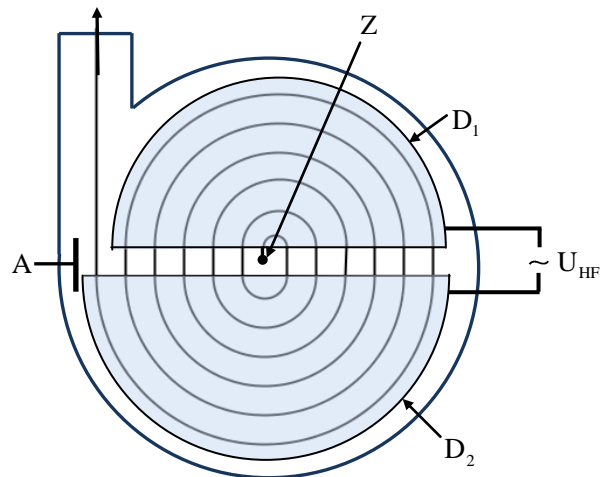
Die Ionen fliegen auf einem Halbkreis und treffen je nach ihrer Masse an unterschiedlichen Stellen auf eine Fotoplatte, wo sie registriert werden.

→ Zyklotron (dient zur Beschleunigung geladener Teilchen auf sehr hohe Geschwindigkeiten)



Zyklotron

Ein Zyklotron besteht aus einer flachen, zylindrischen Vakuumkammer zwischen den Polen eines Elektromagneten, der ein Feld in z-Richtung erzeugt. Die Kammer ist in zwei D-förmige Hälften aufgeteilt, zwischen denen eine hochfrequente Spannung (U_{HF}) anliegt. Die positiven Ionen im Zentrum (Z), die dadurch erzeugt werden, dass ein feiner Strahl des betreffenden Gases mit Elektronen der Glühkathode konzentriert beschossen wird, werden auf die negative Kammerhälfte zu beschleunigt. Da im Inneren der Kammerhälften mit metallischen Wänden kein elektrisches Feld existiert (Faradaykäfig!), beschreiben die Ionen hier im Magnetfeld B einen Halbkreis, dessen Radius r durch die Bedingung $F_z = F_L$ festgelegt ist:



$$\frac{mv^2}{r} = qvB \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

Die Zeit für einen halben Umlauf des Teilchens berechnet sich wie folgt:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{\frac{1}{2}U}{v} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2r\pi}{v} = \frac{r\pi}{v} \stackrel{(1)}{=} \frac{\pi m}{qB}$$

$$t = \frac{\pi m}{qB} \quad (2)$$

Sie ist unabhängig vom Radius r der Bahn des Teilchens.

Wird die Hochfrequenz f_{HF} so gewählt, dass

$$\omega_{\text{HF}} = 2\pi f_{\text{HF}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2t} = \frac{\pi}{t} = \frac{\pi}{\frac{\pi m}{qB}} = \frac{qB}{m}$$

$$f_{\text{HF}} = \frac{qB}{2\pi m} \quad (\text{Zyklotronfrequenz})$$

gilt, so werden die Ionen nach Durchlaufen des Halbkreises immer zu einem Zeitpunkt wieder am Spalt ankommen, bei dem die richtige Polarität der Beschleunigungsspannung anliegt. Ihre Energie nimmt daher bei Durchlaufen des Spaltes um $\Delta E = qU$ zu, ihre Geschwindigkeit v wächst und daher auch gemäß (1) der Radius des nächsten Halbkreises. Die Ionen durchlaufen deshalb eine spiralartige Bahn, die aus lauter Halbkreisen mit wachsenden Radien besteht, bis sie den Rand $r = R$ des Magnetfeldes erreicht haben und dort durch ein elektrisches Ablenkkfeld (A) aus dem Zyklotron extrahiert werden können. Ihre maximale kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}m \left(\frac{qBR}{m} \right)^2 = \frac{q^2}{2m} \cdot (R \cdot B)^2$$

hängt vom Radius R , von der Feldstärke B des Magnetfeldes und vom Verhältnis $\frac{q^2}{2m}$ ab.

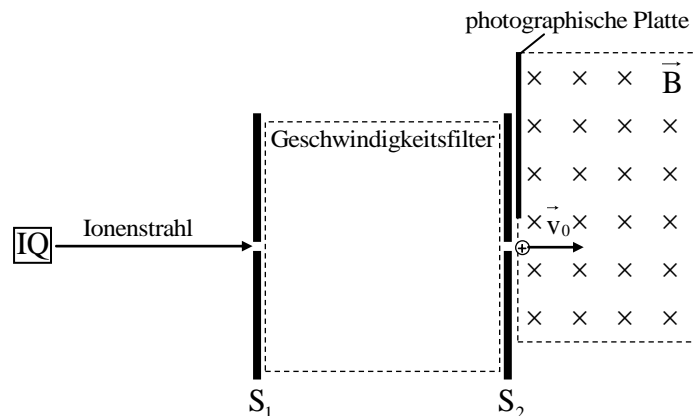
Bei höheren Energien kann man die relativistische Massenzunahme nicht mehr vernachlässigen. Die Teilchen brauchen dadurch für einen Umlauf gemäß (2) länger und erreichen den Spalt zu einem Zeitpunkt der immer mehr gegenüber dem Scheitelwert der Beschleunigungsspannung verschoben ist, bis sie schließlich bei der falschen Phase der

Hochfrequenz ankommen und abgebremst anstatt beschleunigt werden. Dies begrenzt die Maximalenergie auf etwa 20 MeV für Protonen und 70 MeV für Alpha - Teilchen. Um dieses Problem zu lösen wird die Hochfrequenz während des Beschleunigungsvorganges so verringert, dass sie immer in Phase mit der Umlaufzeit bleibt (*Synchro-Zyklotron*). Die Ionen können dann allerdings nicht mehr, wie beim Standard - Zyklotron während jeder HF-Periode aus der Ionenquelle injiziert und beschleunigt werden, sondern immer nur in Pulsen, deren Zeitabstand mindestens gleich der Beschleunigungszeit T eines Ionenpaketes ist.

Ein weiterer Teilchenbeschleuniger ist das Betatron, bei dem der Bahnradius konstant bleibt und somit das Magnetfeld mit steigender Teilchenenergie steigen muss. Das Magnetfeld induziert ein elektrisches Feld das zur Beschleunigungsspannung führt. Zyklotron und Betatron werden aber in der heutigen Zeit kaum mehr gebraucht, da ihre Beschleunigung zu gering ist. Man benutzt sie noch für kleinere Versuche oder manchmal als Vorstufe für das Synchrotron. Meistens jedoch werden Linearbeschleuniger als Vorstufe für das Synchrotron eingesetzt, die Teilchen bereits mit ziemlich hoher Energie (50 MeV) tangential in eine Kreisbahn einschließen. Dort bleiben sie aufgrund besonderer Stabilisierungsmaßnahmen. Die Vakuumröhre (Querschnitt etwa $0,3 \text{ m}^2$) ist daher ein Kreisring, der bei den großen Beschleunigern einen beträchtlichen Durchmesser hat (z. B. beim CERN-Beschleuniger in Genf 200m). Viele Magneten, wesentlich kleiner als der eine große Magnet beim Zyklotron, sind auf dem Kreis angeordnet. Die Feldstärke B steigt mit der Zunahme der Teilchengeschwindigkeit, wodurch die Kreisbahn eingehalten wird. An einer oder an mehreren Stellen des Kreises erfolgt die Beschleunigung durch ein elektrisches Feld, dessen Frequenz mit der Geschwindigkeit der Teilchen steigt.

2010 II

1.0



Mit der oben dargestellten Anordnung kann die Masse von Protonen bestimmt werden. Eine Wasserstoffionenquelle IQ sendet einfach geladene Wasserstoffionen, u.a.

Protonen (${}^1_1\text{H}^+$ - Ionen) mit verschiedenen kinetischen Energien aus. Durch ein kleines Loch in der Blende S_1 treten solche Ionen in einen Geschwindigkeitsfilter ein. Ionen, die den Geschwindigkeitsfilter ohne Ablenkung passieren und dann durch ein kleines Loch in der Blende S_2 verlassen, besitzen ein Geschwindigkeit \vec{v}_0 mit dem Betrag v_0 .

1.1 Erklären Sie anhand einer beschrifteten Skizze die Wirkungsweise eines Geschwindigkeitsfilters.

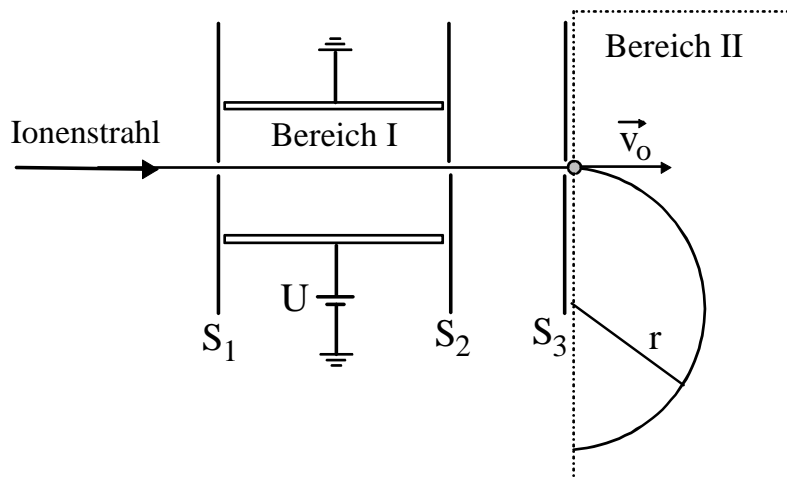
1.2.0 Nach dem Durchlaufen des Geschwindigkeitsfilters gelangen die Protonen in ein homogenes Magnetfeld, dessen Flussdichte \vec{B} zeitlich konstant ist und den Betrag $B = 45 \text{ mT}$ hat. Beim Eintritt in das Magnetfeld haben diese Protonen die

Geschwindigkeit \vec{v}_0 , die senkrecht zu den Feldlinien gerichtet ist und den Betrag $v_0 = 2,8 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hat.

- 1.2.1 Ein Proton erfährt im Magnetfeld eine Kraft. Erläutern Sie, wie sich diese Kraft auf den Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit des Protons auswirkt.
- 1.2.2 Im Magnetfeld bewegen sich die Protonen auf einem Halbkreis mit dem Radius $r_p = 6,5 \text{ cm}$. Berechnen Sie die Masse m_p eines Protons.
- 1.2.3 Die Protonenquelle liefert neben Protonen (${}^1_1\text{H}^+$ – Ionen) auch Deuterionen (${}^2_1\text{D}^+$ – Ionen). Für die Massen m_p und m_D der beiden Ionenarten gilt: $m_D = 2 \cdot m_p$. Ein Deuterion trägt die Ladung $q_D = +1e$, wobei e die Elementarladung ist. Begründen Sie rechnerisch, dass die Protonen und die Deuterionen nicht im selben Punkt auf die an der Blende S_2 angebrachte photographische Platte treffen.

2004 III

2.0



Einfach positiv geladene Ionen mit verschiedenen Geschwindigkeiten treten durch die Öffnung in der Blende S_1 in den Bereich I ein. In diesem Bereich I herrschen ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte \vec{B} und zusätzlich das homogene elektrische Feld eines Plattenkondensators mit der Feldstärke \vec{E} . Die beiden Felder sind zeitlich konstant.

Im Bereich II wird die Bewegung der Ionen nur noch durch ein homogenes Magnetfeld mit der zeitlich konstanten Flussdichte \vec{B}^* beeinflusst.

Die gesamte Anordnung befindet sich im Vakuum. Die Gewichtskräfte der Ionen sind vernachlässigbar klein.

- 2.1.0 Die Felder im Bereich I wirken zusammen mit den Blenden S_1 und S_2 als Geschwindigkeitsfilter für Ionen. Nur Ionen mit einer bestimmten Geschwindigkeit \vec{v}_0 passieren den Bereich I ohne Ablenkung.
- 2.1.1 Geben Sie in einer Skizze, die auch den Vektor \vec{v}_0 enthält, die Richtungen von \vec{B} und \vec{E} an.
- 2.1.2 Die magnetische Flussdichte \vec{B} hat den Betrag $B = 120 \text{ mT}$. Der Kondensator mit dem Plattenabstand $d = 2,0 \text{ cm}$ ist an eine Gleichspannungsquelle mit der Spannung U angeschlossen. Bestimmen Sie, wie groß die Spannung U gewählt werden muss, damit Ionen mit einer

Geschwindigkeit vom Betrag $v_0 = 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ den Bereich I ohne Ablenkung passieren und durch die Blende S_2 gelangen.

2.1.3 Betrachtet werden Ionen des Ionenstrahls, die mit einer Geschwindigkeit \vec{v} in den Bereich I eintreten, deren Betrag v größer als v_0 ist.

Erklären Sie, was mit diesen Ionen unmittelbar nach dem Eintritt in den Bereich I passiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

2.2.0 Diejenigen Ionen, die mit der Geschwindigkeit \vec{v}_0 die Blende S_2 passieren, gelangen durch die Blende S_3 in den Bereich II. Dabei gilt: $v_0 = 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\vec{v}_0 \perp \vec{B}^*$.

2.2.1 Begründen Sie, dass sich die Ionen im Bereich II auf einer Halbkreisbahn bewegen.

2.2.2 Untersuchen Sie rechnerisch, wie der Radius r der Halbkreisbahn von der Masse m eines Ions abhängt.

2.2.3 Die Flussdichte \vec{B}^* des Magnetfeldes im Bereich II hat den Betrag $B^* = 640 \text{ mT}$.

Berechnen Sie die Masse m eines Ions, das sich auf einem Halbkreis mit dem Radius $r = 8,0 \text{ cm}$ bewegt.