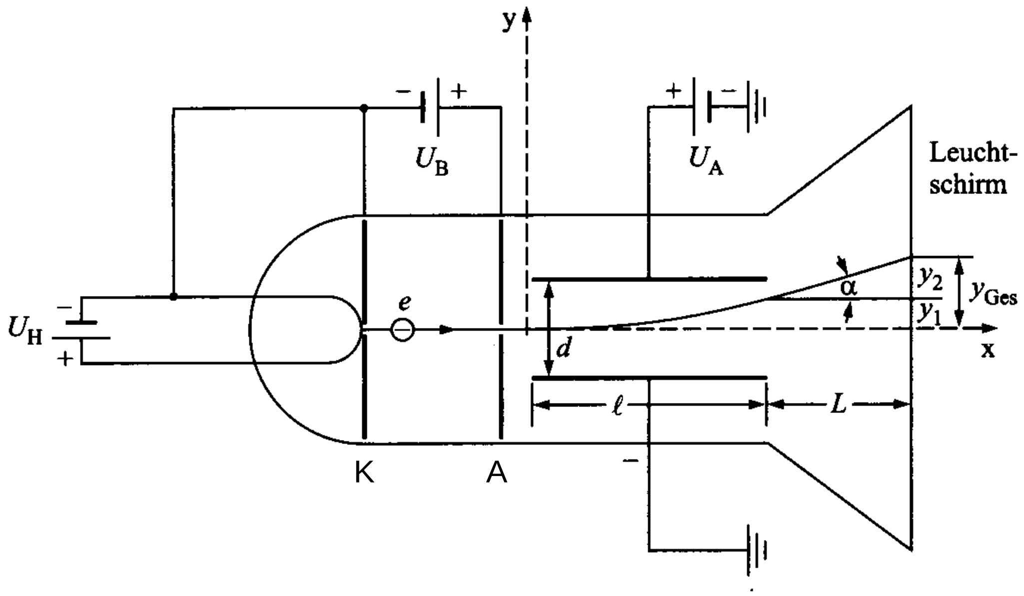
11.23 Bewegung eines Elektrons im homogenen Querfeld

Der Physiker Karl Ferdinand Braun (1850 – 1918; dt. Physiker) entwickelte eine Elektronenstrahlröhre, die Braun´sche Röhre.
Die von der Glühkathode emittierten Elektronen werden zwischen der Kathode K und der Anode A in einem Längsfeld beschleunigt und treten mit der Geschwindigkeit $v_0 = v_x$ durch die „Lochblende“ der Anode hindurch.
Ohne Einwirkung äußerer Kräfte bewegen sie sich geradlinig mit der Geschwindigkeit $v_0 = v_x$ in einem feldfreien Raum und gelangen dann in das Feld eines Ablenkkondensators.
Den Einfluss dieses Feldes auf ein Elektron wollen wir nun genauer untersuchen.



Das elektrische Feld im Ablenkkondensator bewirkt bei der oben angegebenen Polung eine nach oben wirkende Kraft auf die Elektronen. Somit werden sie nach oben beschleunigt. Sie erhalten eine Geschwindigkeitskomponente in $y-$Richtung.
Die Geschwindigkeit des Elektrons im Feld des Ablenkkondensators setzt sich nun aus einer Geschwindigkeit in $x-$ und einer Geschwindigkeit in $y-$Richtung zusammen.
Betrachten wir dazu die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten:

In $x-$Richtung gilt (Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit):

$$v_x = v_0 = \sqrt{2 \cdot \tfrac{e}{m} \cdot U_B} = \text{konst.} \qquad (1)$$

Für die benötigte Flugzeit zum durchlaufen der Länge x gilt:

$$v_0 = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} \qquad (2)$$

Für die Aufenthaltsdauer t_A des Elektrons im elektrischen Feld des Ablenkkondensators gilt somit:

$$v_0 = \frac{\ell}{t_A} \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{\ell}{v_0} \qquad (3)$$

(Das ist die Zeit, die ein Elektron zum Durchfliegen eines Kondensators der Länge ℓ benötigt).

In $y-$Richtung gilt (Bewegung mit konstanter Beschleunigung):
Das Elektron ist zunächst in Ruhe und wird nun durch die elektrische Kraft beschleunigt. Für die Beschleunigung im homogenen Längsfeld gilt:

$$F = F_{el}$$
$$ma = eE$$
$$ma = e \cdot \frac{U_A}{d}$$
$$a = \frac{e}{m} \cdot \frac{U_A}{d}$$

Somit folgt für die Geschwindigkeit des Elektrons nach der Zeit t:

$$v_y = a \cdot t = \frac{e}{m} \cdot \frac{U_A}{d} \cdot t \qquad (4)$$

Für den in $y-$Richtung zurückgelegten Weg gilt:

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{U_A}{d} \cdot t^2 \qquad (5)$$

Setzt man Gleichung (2) in Gleichung (5) ein, so erhält man:

$$y(x) = \frac{eU_A}{2md} \cdot \frac{x^2}{v_0^2}$$

und jetzt noch Gleichung (1):

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}\frac{U_A}{U_B} \cdot \frac{1}{d} \cdot x^2} \qquad (6)$$

Bahngleichung eines Elektrons im Ablenkkondensator

Das Elektron bewegt sich somit auf einer parabelförmigen Bahn durch den Ablenkkondensator.

Für die Ablenkung y_1 beim Verlassen eines Kondensators der Länge $x = \ell$ folgt:

$$y_1 = y(\ell) = \frac{1}{4}\frac{U_A}{U_B} \cdot \frac{\ell^2}{d} \qquad (7)$$

Hat das Elektron den Kondensator verlassen, so bewegt es sich geradlinig mit der erlangten Geschwindigkeit weiter.

Der Ablenkwinkel α errechnet sich aus der Steigung der Parabel (6) an der Stelle $x = \ell$.

$$y'(x) = \frac{1}{2}\frac{U_A}{U_B} \cdot \frac{1}{d} \cdot x$$
$$\tan\alpha = y'(\ell) = \frac{1}{2}\frac{U_A}{U_B} \cdot \frac{\ell}{d} \qquad (8)$$

Für die Ablenkung y_2 muss man zunächst eine kleine geometrische Überlegungen anstellen:

$$\tan\alpha = \frac{y_2}{L} \quad \Rightarrow \quad y_2 = L \cdot \tan\alpha \qquad (9)$$

Für die gesamte Ablenkung $y_{Ges} = y_1 + y_2$ folgt dann:

$$y_{Ges} = \frac{1}{4}\frac{U_A}{U_B}\cdot\frac{\ell^2}{d} + L\cdot\tan\alpha = \frac{1}{4}\frac{U_A}{U_B}\cdot\frac{\ell^2}{d} + L\cdot\frac{1}{2}\frac{U_A}{U_B}\cdot\frac{1}{d}\cdot\ell = \frac{1}{2}\cdot\frac{U_A}{U_B}\cdot\frac{\ell}{d}\cdot\left(\frac{\ell}{2}+L\right)$$

Den Ablenkwinkel α erhält man auch ohne Differenzialrechnung und Parabelgleichung.
Es gilt nämlich:

$$\tan\alpha = \frac{v_y(\ell)}{v_x(\ell)} = \frac{a\cdot t_A}{v_0} = \frac{a\cdot\frac{\ell}{v_0}}{v_0} = \frac{a\cdot\ell}{v_0^2} = \frac{\frac{e}{m}\cdot\frac{U_A}{d}\cdot\ell}{2\cdot\frac{e}{m}\cdot U_B} = \frac{1}{2}\cdot\frac{U_A}{U_B}\cdot\frac{\ell}{d}$$

Experimentelle Überprüfung der Bahnkurve
Wir überprüfen die Form der Bahnkurve mit einer Elektronenstrahlablenkröhre. Dabei streift der Elektronenstrahl an einem Schirm mit einem $x-y-$Koordinatensystem entlang.
Die Schirmoberfläche ist mit einem fluoreszierenden Material überzogen. Auf diese Weise lässt sich die Bahnkurve der Elektronen sichtbar machen.

Messwerte:

Beschleunigungsspannung:	$U_B = 2200V$
Ablenkspannung:	$U_A = 1020V$
Ablenkung:	$y = 0{,}02m$
Plattenabstand:	$d = 0{,}054m$
Kondensatorlänge:	$x = \ell = 0{,}09m$

Rechnerische Überprüfung der Ablenkung mit den Messwerten:

$$y(x) = \frac{1}{4}\frac{U_A}{U_B}\cdot\frac{1}{d}\cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad y(\ell) = ...$$

Ergebnis: Der berechnete Wert stimmt gut mit dem experimentell ermittelten Wert überein.