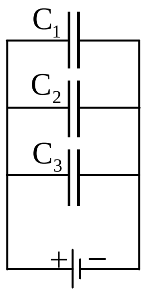
11.16 Schaltung von Kondensatoren

1. Parallelschaltung von Kondensatoren



Bei der Parallelschaltung ist die an den Kondensatoren anliegende Spannung U konstant. Es gilt:

$$U = U_1 = U_2 = U_3$$

Die Kondensatorgleichung $Q = C \cdot U$ liefert die sich auf den einzelnen Kondensatoren befindenden Ladungen:

$$Q_1 = C_1 U_1 = C_1 U$$
$$Q_2 = C_2 U_2 = C_2 U$$
$$Q_3 = C_3 U_3 = C_3 U$$

Für die im gesamten „Stromkreis" sich befindende Ladung Q_{Ges} gilt dann:

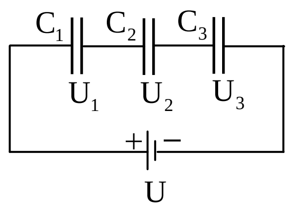
$$Q_{Ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 U + C_2 U + C_3 U = (C_1 + C_2 + C_3) \cdot U = C_{Ges} \cdot U$$

mit $C_{Ges} = C_1 + C_2 + C_3$

Allgemein gilt für die Parallelschaltung von n Kondensatoren:

$$\boxed{C_{Ges} = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n}$$

2. Reihenschaltung von Kondensatoren



Bei der Reihenschaltung sind die an den Kondensatoren anliegenden Spannungen unterschiedlich, die Ladungen die sich auf den einzelnen Kondensatoren befinden dagegen gleich. Es gilt:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

Aus der Kondensatorgleichung $Q = C \cdot U$ folgt für die an den einzelnen Kondensatoren anliegenden Spannungen:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}$$
$$U_2 = \frac{Q}{C_2}$$
$$U_3 = \frac{Q}{C_3}$$

Die Gesamtspannung U erhält man nun durch Addition der Teilspannungen.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) \cdot Q = \frac{Q}{C_{Ges}}$$

mit $\frac{1}{C_{Ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

Allgemein gilt für die Reihenschaltung von n Kondensatoren:

$$\boxed{\frac{1}{C_{Ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_n}}$$

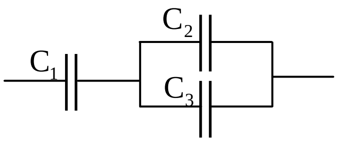
Aufgaben:

1.0 Gegeben sind drei Kondensatoren mit den Kapazitäten $C_1 = 8{,}16\,\text{nF}$, $C_2 = 5{,}44\,\text{nF}$ und $C_3 = 1{,}36\,\text{nF}$.

1.1 Wie muss man die drei Kondensatoren schalten um 1. die größte, 2. die kleinste Kapazität zu erhalten? Wie groß sind diese Kapazitäten?

1.2 Wie viele unterschiedliche Kapazitäten lassen sich aus diesen drei Kondensatoren herstellen, wenn für eine Schaltung immer alle drei Kondensatoren verwendet werden und diese parallel und/oder in Reihe geschaltet werden?

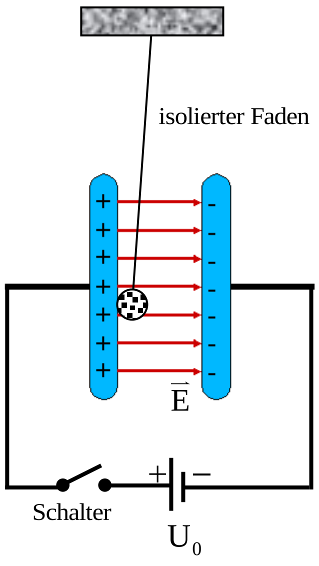
1.3 Berechnen Sie für folgende Schaltung die Gesamtkapazität!



1.4 Für einen Versuch wird ein Kondensator der Kapazität $C = 1{,}20\,\text{nF} \pm 5\%$ benötigt. Wie schaltet man die drei Kondensatoren, um die gewünschte Kapazität zu bekommen? Wie groß ist diese Kapazität?

11.17 Energieinhalt eines Kondensatorfeldes (homogenes Feld)

<u>Versuch</u>:



<u>Versuchsdurchführung</u>:
Ein Kondensator wird über eine Spannungsquelle aufgeladen (Schalter S geschlossen). Nun wird der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt (S offen) und zwischen die Platten des Kondensators eine an einem isolierten Faden aufgehängte Metallkugel (Tischtennisball mit Alufolie überzogen) gebracht. Die Kugel wird nun nach links ausgelenkt, so dass sie die linke Platte des Plattenkondensators berührt.

<u>Beobachtung</u>:
Die Metallkugel bewegt sich so lange zwischen den Platten hin und her, bis der Kondensator völlig entladen ist und die Kugel schließlich zum Stillstand kommt.

Erklärung:
Die Metallkugel nimmt an der positiv geladenen Platte die (positive) Ladungsmenge Q_1 auf. Aufgrund der Abstoßungskraft gleichnamiger Ladung erfährt die Kugel eine Kraft nach rechts und bewegt sich zur negativ geladenen Platte. Dort wird die (positive) Ladungsmenge Q_1 an die negativ geladene Platte abgegeben und nimmt die (negative) Ladungsmenge Q_2 auf. Die Kugel bewegt sich nach links und gibt an der positiv geladenen Platte die (negative) Ladungsmenge Q_2 ab und nimmt die (positive) Ladungsmenge Q_3 auf. Obiger Vorgang wiederholt sich jetzt solange, bis die beiden Platten entladen sind.
Die Bewegungsenergie (kinetische Energie) der Metallkugel wird so dem elektrischen Feld zwischen den Platten entzogen; gleichzeitig wurde dabei der Kondensator entladen.
D.h. die mechanische Arbeit, die für den Ladungstransport der Kugel insgesamt aufgewendet wird muss nun gleich dem Energieinhalt des elektrischen Feldes zu Beginn des Entladevorgangs sein.

Um nun die Ladungsmenge Q im elektrischen Feld des Plattenkondensators zu verschieben ist die Verschiebearbeit W nötig. Es gilt:

$$W = F \cdot s = Q \cdot E \cdot d = Q \cdot \frac{U}{d} \cdot d = Q \cdot U$$

Doch leider ist diese Überlegung falsch, da beim Entladen weder die Spannung U noch die transportierte Ladungsmenge Q konstant sind.

Deshalb muss man hier etwas anders rechnen.

$$W = \int_{U_{max}}^{0} Q \cdot dU = \int_{U_{max}}^{0} C \cdot U \cdot dU = C \cdot \left[\tfrac{1}{2} U^2 \right]_{U_{max}}^{0} = C \cdot \left(0 - \tfrac{1}{2} U_{max}^2 \right) = -\tfrac{1}{2} C U_{max}^2 < 0$$

Da hier $W < 0$ wird logischerweise Arbeit vom Feld verrichtet.

Für die elektrische Energie E_{el} im Feld eines geladenen Kondensators folgt dann:

$$\left.\begin{array}{l} W = -\tfrac{1}{2} C U^2 \\ W = \Delta E_{el} = \underbrace{E_{el_n}}_{0} - E_{el_v} = -E_{el_v} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{E_{el} = \tfrac{1}{2} C U^2}$$

Speziell für den Plattenkondensator gilt:

$$E_{el} = \tfrac{1}{2} C U^2 = \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} \cdot U^2 = \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \underbrace{A \cdot d}_{=V} \cdot E^2$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} \qquad E = \tfrac{U}{d} \Rightarrow U = Ed$$

Somit folgt für den Energieinhalt eines Plattenkondensators:

$$\boxed{E_{el} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E^2 \cdot V}$$

Aufgaben:

2.1 Welche Energie speichert der Kondensator eines Elektronenblitzgerätes bei $U = 600\,V$ und $C = 80\,\mu F$?

2.2 Wie groß ist die mittlere Lichtleistung in Watt, wenn die Lampe mit dieser Energie eine Zeit von $t = \frac{1}{500}\,s$ lange brennt und ca. 15% der Energie in Licht verwandelt werden?

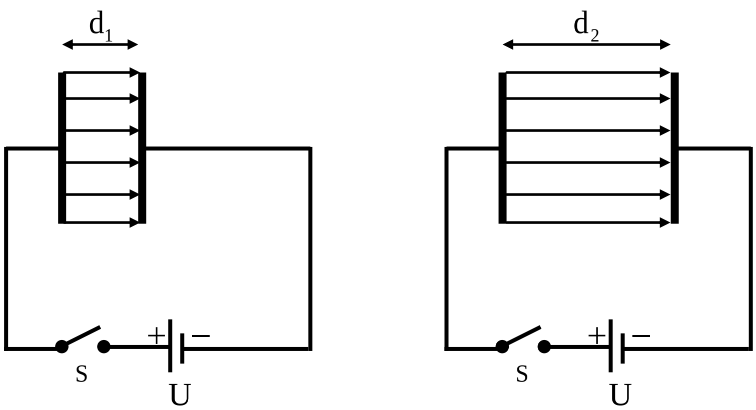
3.0 Zwei Aluminiumfolien der Länge $\ell = 3{,}0\,m$ und der Breite $b = 5{,}0\,cm$ werden durch Wachspapier der Dicke $d = 50\,\mu m$ gegeneinander isoliert und zu einem Blockkondensator aufgewickelt. Dabei werden beide Seiten jeder Folie wirksam.

3.1 Berechnen Sie die Kapazität dieses Kondensator, wenn die relative Dielektrizitätskonstante des Wachspapiers $\varepsilon_r = 2{,}4$ ist?

3.2 Welche Ladung und welche Energie speichert der Kondensator bei einer Spannung von $U = 200\,V$?

11.18 Energieänderung des Kondensatorfeldes beim Plattenkondensator durch Verschieben der Platten; Kraft zwischen den Platten

1. Fall: Die Spannungsquelle U wird vor dem Verschieben der Platten abgetrennt.



Wird der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt, und der Plattenabstand vergrößert, so ändert sich die auf den Platten befindliche Ladungsmenge Q nicht; also:

$$Q = \text{konst.}$$

Da nun $Q = CU = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A}{d} U = \varepsilon_0\varepsilon_r A \cdot \frac{U}{d} = \varepsilon_0\varepsilon_r A \cdot E = \text{konst.}$ muss auch $E = \text{konst.}$ sein.

Insbesondere folgt aus $d_2 > d_1$ dass auch $U_2 > U_1$ sein muss.

Für die Änderung des Energieinhalts des Kondensators folgt nun:

$$\Delta W = W_{\text{nachh.}} - W_{\text{vorh.}} = W_2 - W_1$$

$$\Delta W = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 V_2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 V_1 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \left(V_2 - V_1\right) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \cdot \Delta V$$

oder:

$$\Delta W = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 V_2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 V_1 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 A d_2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 A d_1 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 A\left(d_2 - d_1\right) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 A \cdot \Delta s$$

Insgesamt:

$$\boxed{\Delta W = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \cdot \Delta V = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 A \cdot \Delta s}$$

$W \sim \Delta V$

$W \sim \Delta s$

Vergrößert man also den Plattenabstand des von der Spannungsquelle abgetrennnten Kondensators, so nimmt der Energieinhalt des C-Feldes wegen $\Delta s > 0$ nach obiger Gleichung zu.
Verkleinert man den Plattenabstand, so nimmt der Energieinhalt des C-Feldes ab.
Nun muss aber wegen des Energieerhaltungssatzes diese Zunahme der elektrischen Feldenergie ΔW von außen durch mechanische Arbeit, die beim Auseinanderziehen der Platten verrichtet wird, zugeführt werden.
Also folgt:

$$\left|W_{mech._{außen}}\right| = |\Delta W|$$

$$W_{mech.} = \Delta W$$

$$F \cdot \Delta s \cdot \underbrace{\cos\alpha}_{1} = \Delta W$$

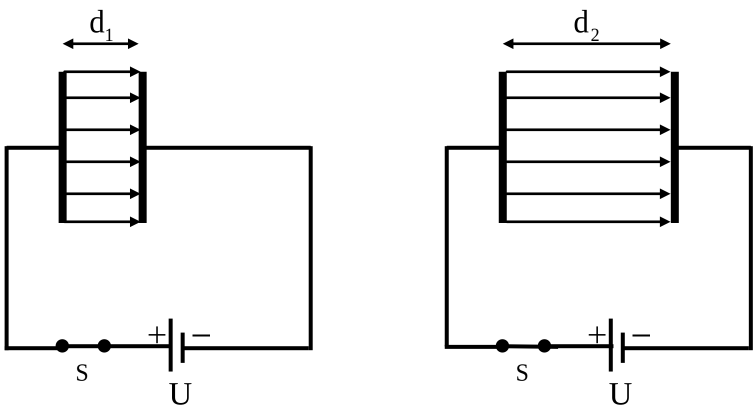
$$F \cdot \Delta s = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 A \cdot \Delta s$$

$$F = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 A$$

$$\boxed{F = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \frac{U^2}{d^2} \cdot A}$$

Kraft zwischen den Kondensatorplatten gilt f. 1. + 2. Fall

2. Fall: <u>Die Kondensatorplatten bleiben während des Verschiebens an der Spannungsquelle angeschlossen</u>.



Da die Kondensatorplatten an der Spannungsquelle angeschlossen bleiben gilt:

$$U = \text{konst.}$$

Wegen $E = \dfrac{U}{d}$ ist $E \neq \text{konst.}$ bei variablen d.

Wegen $Q = CU = \varepsilon_0\varepsilon_r \dfrac{A}{d} U$ ist auch $Q \neq \text{konst.}$ bei variablen d.

Somit folgt:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot E_2^2 \cdot V_2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot E_1^2 \cdot V_1 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot E_2^2 \cdot A \cdot d_2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot E_1^2 \cdot A \cdot d_1$$

$$\Delta W = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot A \cdot \left(E_2^2 \cdot d_2 - E_1^2 \cdot d_1\right) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot A \cdot \left(\frac{U_2^2}{d_2^2} d_2 - \frac{U_1^2}{d_1^2} d_1\right) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot A \cdot \left(\frac{U^2}{d_2} - \frac{U^2}{d_1}\right)$$

$$\boxed{\Delta W = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot A \cdot U^2 \cdot \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)}$$

Beim Auseinanderziehen gilt:

$$d_2 > d_1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{d_2} < \frac{1}{d_1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} < 0 \;\Rightarrow\; \Delta W < 0 \;\Rightarrow\; \text{Feldenergie sinkt}$$

Beim Zusammendrücken gilt:

$$d_2 < d_1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{d_2} > \frac{1}{d_1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} > 0 \;\Rightarrow\; \Delta W > 0 \;\Rightarrow\; \text{Feldenergie steigt}$$

Merke: Vergrößert man den Plattenabstand eines Kondensators, der dabei mit der Spannungsquelle verbunden bleibt, so nimmt der Energieinhalt des C-Feldes ab.
Mit dem Energieerhaltungssatz ist dies nur vereinbar, wenn diese elektrische Feldenergie über die Spannungsquelle an das öffentliche Netz abgegeben wird.
Außerdem wird auch hier beim Auseinanderziehen der Platten mechanische Arbeit zugeführt. Diese mechanische Arbeit wird ebenfalls in elektrische Energie umgewandelt und über die Spannungsquelle an das öffentliche Netz abgegeben.

Wegen $E \neq \text{konst.}$ folgt: $F = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 A \neq \text{konst.}$
Somit muss man zur Berechnung der zugeführten mechanischen Arbeit beim auseinanderziehen der Platten wie folgt rechnen.

$$W_{mech.,zu} = \int_{d_1}^{d_2} F \cdot ds = \int_{d_1}^{d_2} \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot A \cdot \frac{U^2}{s^2} \cdot ds = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot A \cdot U^2 \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{s^2} \cdot ds$$

$$W_{mech.,zu} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot A \cdot U^2 \cdot \left[-\frac{1}{s}\right]_{d_1}^{d_2} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot A \cdot U^2 \cdot \left[\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right] = -\Delta W$$

$$\left|W_{mech.,zu}\right| = \left|\Delta W\right|$$

Aufgaben

4.0 An einem Plattenkondensator mit einer Plattenfläche von $A = 0{,}90\,\text{m}^2$ und einem Plattenabstand $d_1 = 2{,}00\,\text{mm}$ wird eine Spannung von $U = 480\,\text{V}$ angelegt. Dielektrikum ist Luft. Danach werden die Platten von der Spannungsquelle getrennt.

4.1 Wie groß ist die aufgenommene Ladung?

4.2 Mit welcher Kraft ziehen sich die Platten gegenseitig an?

4.3 Wie groß ist die im Kondensator gespeicherte Energie E_1 beim Abstand d_1?

4.4 Anschließend zieht man die Platten auf den größeren Abstand $d_2 = 4{,}00\,\text{mm}$ auseinander. Welche Arbeit ist dazu erforderlich?

4.5 Wie groß ist jetzt die Kraft zwischen den beiden Platten? Stelle F in Abhängigkeit von d graphisch dar (ohne Maßstab)!

4.6 Beim Plattenabstand d_2 werden die beiden Platten leitend miteinander verbunden. Berechne die elektrische Energie, die dabei in Wärmeenergie umgesetzt wird!

5.0 Der Plattenkondensator von Aufgabe 4.0 bleibt nach dem Anlegen der Spannung $\left(U = 480\,\mathrm{V}\right)$ mit der Spannungsquelle verbunden:

5.1 Welche Änderung der Feldenergie ergibt sich, wenn man die Platten von Abstand $d_1 = 2{,}00\,\mathrm{mm}$ auf den Abstand $d_2 = 4{,}00\,\mathrm{mm}$ auseinanderzieht?

5.2 Wie groß ist jetzt der Energieinhalt des Kondensators beim Abstand $d_2 = 4{,}00\,\mathrm{mm}$? Vergleiche mit dem Energieinhalt bei $d_1 = 2{,}00\,\mathrm{mm}$!

5.3 Wohin geht die elektrische Energie, um die der Energieinhalt des Kondensators abnimmt, und die mechanische Energie, die für das Trennen der Platten aufgewendet wurde?

5.4 Wie groß ist jetzt die Kraft zwischen den Platten bei $d_2 = 4{,}00\,\mathrm{mm}$? Stelle F in Abhängigkeit von d graphisch dar (ohne Maßstab)!