Aufgabe zum Plattenkondensator

1.0 Zwei quadratische Plattenkondensatoren C_1 und C_2 mit je einer Seitenlänge von $a = 10{,}0\,\text{cm}$ sind wie abgebildet parallel geschaltet und bleiben nach dem Aufladen mit der Spannungsquelle $U_0 = 125\,\text{V}$ über den Schalter S verbunden. Der Plattenabstand beträgt zunächst für beiden Kondensatoren $d_0 = 2{,}0\,\text{mm}$. C_1 ist mit einem Dieelektrikum $(\varepsilon_r = 3{,}0)$ und C_2 mit Luft $\left(\varepsilon_{r_{Luft}} = 1{,}0\right)$ befüllt.

1.1 Berechnen Sie die gesamte in der Anordnung befindliche Ladungsmenge Q_{Ges}. (4 BE)

1.2.0 Im folgenden werden nun die Platten des Kondensators C_2 mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 1{,}0\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ auseinandergezogen. Der Plattenabstand von C_1 bleibt dabei unverändert.

1.2.1 Zeigen Sie, dass für die Gesamtkapazität $C_{Ges}(t)$ gilt: (3 BE)

$$C_{Ges}(t) = \varepsilon_0 a^2 \left(\frac{1}{d_0 + v \cdot t} + \frac{\varepsilon_r}{d_0} \right)$$

1.2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bei dem sich die Gesamtkapazität auf 80% des Anfangwertes verringert hat. (5 BE)
$(\text{Teilergebnis}: t = 8{,}0\,\text{s})$

1.2.3 Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck her um die Änderung des Energieinhalts des elektrischen Feldes der Gesamtanordnung bei dem Vorgang von 1.2.2 zu berechnen. Geben Sie den Zahlenwert in Joule an und interpretieren Sie das Vorzeichen ihres Ergebnisses. (6 BE)

Lösung:

1.1 $$Q_{Ges} = C_{Ges} \cdot U = \left(C_1 + C_2\right) \cdot U = \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r_{Luft}} \cdot \frac{A}{d}\right) \cdot U = \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{a^2}{d_0} + \varepsilon_0 \cdot \frac{a^2}{d_0}\right) \cdot U$$

$$Q_{Ges} = \varepsilon_0 \cdot \frac{a^2}{d_0} \cdot \left(\varepsilon_r + 1\right) \cdot U = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\tfrac{F}{m} \cdot \frac{(0{,}1\,m)^2}{2 \cdot 10^{-3} \cdot m} \cdot \left(3+1\right) \cdot 125\,V \approx 2{,}2 \cdot 10^{-8}\,C$$

$$\left(C_{Ges} = 1{,}77 \cdot 10^{-10}\,F\right)$$

1.2.1 $$C_{Ges} = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A_1}{d_1} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r_{Luft}} \cdot \frac{A_2}{d_2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{a^2}{d_0} + \varepsilon_0 \cdot \frac{a^2}{d_0 + s}$$

$$C_{Ges}(t) = \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_r}{d_0} + \frac{1}{d_0 + s(t)}\right) = \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{d_0 + v \cdot t} + \frac{\varepsilon_r}{d_0}\right)$$

1.2.2 Es gilt:

$$C_{Ges}(t) = 0{,}8 \cdot C_{Ges}(t=0)$$

$$\varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{d_0 + v \cdot t} + \frac{\varepsilon_r}{d_0}\right) = 0{,}8 \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{d_0} + \frac{\varepsilon_r}{d_0}\right)$$

$$\frac{1}{d_0 + v \cdot t} + \frac{\varepsilon_r}{d_0} = 0{,}8 \cdot \left(\frac{1}{d_0} + \frac{\varepsilon_r}{d_0}\right)$$

$$\frac{1}{d_0 + v \cdot t} + \frac{\varepsilon_r}{d_0} = 0{,}8 \cdot \frac{1}{d_0} + 0{,}8 \cdot \frac{\varepsilon_r}{d_0}$$

$$\frac{1}{d_0 + v \cdot t} = 0{,}8 \cdot \frac{1}{d_0} - 0{,}2 \cdot \frac{\varepsilon_r}{d_0}$$

$$d_0 + v \cdot t = \frac{1}{\frac{1}{d_0}\left(0{,}8 - 0{,}2 \cdot \varepsilon_r\right)}$$

$$v \cdot t = \frac{d_0}{0{,}8 - 0{,}2 \cdot \varepsilon_r} - d_0$$

$$t = \frac{d_0}{v} \cdot \left(\frac{1}{0{,}8 - 0{,}2 \cdot \varepsilon_r} - 1\right)$$

$$t = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3}\,m}{1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s}} \left(\frac{1}{0{,}8 - 0{,}2 \cdot 3} - 1\right) = \underline{\underline{8{,}0\,s}}$$

1.2.3 $$\Delta E = E_{el_n} - E_{el_v} = E_{el}(t) - E_{el}(t=0) = \tfrac{1}{2} C_{Ges}(t) \cdot U^2 - \tfrac{1}{2} C_{Ges}(0) \cdot U^2$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} U^2 \left(C_{Ges}(t) - C_{Ges}(0)\right) = \tfrac{1}{2} U^2 \left(\varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{d_0 + v \cdot t} + \frac{\varepsilon_r}{d_0}\right) - \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{d_0} + \frac{\varepsilon_r}{d_0}\right)\right)$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} U^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{d_0 + v \cdot t} + \frac{\varepsilon_r}{d_0} - \frac{1}{d_0} - \frac{\varepsilon_r}{d_0}\right) = \tfrac{1}{2} U^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{d_0 + v \cdot t} - \frac{1}{d_0}\right)$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} \cdot \left(125\,V\right)^2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\tfrac{F}{m} \cdot \left(0{,}1\,m\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2{,}0 \cdot 10^{-3}\,m + 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s} \cdot 8{,}0\,s} - \frac{1}{2{,}0 \cdot 10^{-3}\,m}\right)$$

$$\Delta E = \underline{\underline{-2{,}8 \cdot 10^{-7}\,J}}$$

Da $\Delta E < 0$ nimmt der Energieinhalt des C-Feldes ab. Die Energie $|\Delta E|$ wird an die Spannungsquelle abgegeben.