Aufgabe zum elektrischen Potential

1.0 Eine felderzeugende Ladung $Q = \pm 5,0 \cdot 10^{-9}\,C$ ist auf eine Konduktorkugel mit dem Radius $R = 1,0\,cm$ aufgebracht.

1.1 Stellen Sie in einem $r-\rho-$Diagramm den Potentialverlauf für $r > R$ dar!

Es gilt: $\rho(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$ $\rightarrow$ Diagramm

1.2 Geben Sie das elektrische Potential an der Kugeloberfläche an!

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}} \cdot \frac{\pm 5,0 \cdot 10^{-9}\,C}{0,01\,m} = \pm 4,5 \cdot 10^3\,V$$

1.3 Geben Sie den Potentialverlauf im inneren der Konduktorkugel an!

Im Inneren der Kugel gilt:

$$\rho = \frac{E_{pot}}{q} \Rightarrow \rho_i = \rho(r < r_o) = \frac{E_{pot}(r < r_o)}{q} = \frac{E_{pot}(r_o)}{q} = \ldots = \pm 4,5 \cdot 10^3\,V$$

1.4 Welche elektrische Spannung besteht zwischen den Feldpunkten $P_1\,(r_1 = 1,0\,cm)$ und $P_2\,(r_2 = 12\,cm)$ bei negativer felderzeugender Ladung?

$$U_{12} = \rho_2 - \rho_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$U_{12} = \frac{-5,0 \cdot 10^{-9}\,C}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}} \left(\frac{1}{0,12\,m} - \frac{1}{0,01\,m}\right) = +4,1 \cdot 10^3\,V$$

1.5 Welche Arbeit ist zu verrichten, um ein Proton vom Feldpunkt P_1 zum Feldpunkt P_2 zu bringen $(Q < 0)$?

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{q} \Rightarrow W_{12} = U_{12} \cdot q = 4,1 \cdot 10^3\,V \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\,C = 6,6 \cdot 10^{-16}\,J \quad (\hat{=}\, 4,1\,keV)$$

1.6 Mit welcher Geschwindigkeit v prallt ein Proton auf die Konduktorkugel auf, wenn man es vom Punkt P_2 aus loslässt $(Q < 0)$?

$$W_{kin} = W_{12}$$

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = W_{12}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{12}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6 \cdot 10^{-16}\,J}{1,67 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 8,9 \cdot 10^5\,\tfrac{m}{s}$$

2. Die Kugel eines Bandgenerators trägt die Ladung $Q = 3,0 \cdot 10^{-6}\,As$. Im Abstand $s_A = 40\,cm$ vom Kugelmittelpunkt befindet sich der Punkt A, im Abstand $s_B = 60\,cm$ vom Kugelmittelpunkt der Punkt B. Von A und B aus geht man jeweils $10\,cm$ radial nach außen und gelangt zu den Punkten C und D.
Wie groß sind die Spannungen U_{AC} und U_{DB} im elektrischen Feld des Bandgenerators?

$$U_{AC} = \rho_C - \rho_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{s_C} - \frac{1}{s_A}\right) = \frac{3,0 \cdot 10^{-6}\,As}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}} \cdot \left(\frac{1}{0,5\,m} - \frac{1}{0,4\,m}\right) = -1,3 \cdot 10^4\,V$$

$$U_{DB} = \rho_B - \rho_D = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{s_B} - \frac{1}{s_D}\right) = \frac{3,0 \cdot 10^{-6}\,As}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}} \cdot \left(\frac{1}{0,6\,m} - \frac{1}{0,7\,m}\right) = 6,4 \cdot 10^3\,V$$

3.0 Die Kugel eines Van-de-Graaf Generators (Hochspannungsquelle) hat einen Durchmesser von $R = 30\,\text{cm}$. Die Kugel wird nun laufend auf einer Spannung von $U = 12\,\text{kV}$ gehalten.

3.1 Welche Ladung trägt die Kugel?

$$U_{\infty 0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_\infty} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_0} \quad \Rightarrow \quad Q = 4\pi\varepsilon_0 \cdot r_0 \cdot U_{\infty 0}$$

$$Q = 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\tfrac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 0{,}15\,\text{m} \cdot 12 \cdot 10^3\,\text{V} = 2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\text{C}$$

3.2 Wie groß ist der Betrag der Feldstärke in einer Entfernung von $r = 60\,\text{cm}$ vom Kugelmittelpunkt?

$$E = \frac{F_C}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\text{C}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\tfrac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot (0{,}6\,\text{m})^2} = 5{,}0 \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

3.3 Welche Spannung würde dort ein Flammsondenpaar von $d = 2{,}0\,\text{cm}$ Sondenabstand anzeigen?

$$U_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\text{C}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\tfrac{\text{As}}{\text{Vm}}} \cdot \left(\frac{1}{0{,}59\,\text{m}} - \frac{1}{0{,}61\,\text{m}} \right) = 1{,}0 \cdot 10^2\,\text{V}$$

3.4 Wie groß ist der Betrag der Feldstärke in einem Abstand von $r = 90\,\text{cm}$?

$$E = \frac{F_C}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\text{C}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\tfrac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot (0{,}9\,\text{m})^2} = 2{,}2 \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

AP 2006 I

2.0 Nach dem bohrschen Atommodell für das Wasserstoffatom kann das Elektron den Atomkern, der aus einem Proton besteht, nur auf bestimmten Kreisbahnen umlaufen. Für den Radius r_n einer solchen Kreisbahn gilt: $r_n = r_1 \cdot n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$. Im Grundzustand des Wasserstoffatoms $(n = 1)$ bewegt sich das Elektron auf der Kreisbahn mit dem kleinsten Radius $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$.
Gravitationskräfte werden im bohrschen Atommodell vernachlässigt.

2.1 Das Elektron befindet sich auf der Kreisbahn mit dem Radius $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$. Das Elektron und der Atomkern tragen ungleichnamige Ladungen; dennoch fällt das Elektron nicht in den Kern.
Erläutern Sie diesen Sachverhalt.

Für ein außenstehendes Bezugssystem gilt:
Die für die Kreisbahn erforderliche Zentralkraft $\vec{F}_Z$ wird gerade durch die Coulombkraft $\vec{F}_C$, die der Atomkern (Proton) auf das Elektron ausübt, aufgebracht.
Das Elektron fällt nicht in den Kern, weil die Coulombkraft gerade ausreicht, das Elektron auf der Kreisbahn zu halten.

2.2 Berechnen Sie den Betrag v_1 der Geschwindigkeit, mit der das Elektron den Atomkern auf der Kreisbahn mit dem Radius r_1 umläuft.

Mit $Q = q = e$ folgt:

$$F_{Z_1} = F_{el_1}$$

$$m_e \cdot \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_1^2}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot r_1}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\left(1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\right)^2}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}}} = 2{,}1858...\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^6\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Einheitenvergleich:

$$\left[\sqrt{\frac{\mathrm{C}^2}{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{F} \cdot \mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{(\mathrm{As})^2}{\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} \cdot \mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

ODER: $\left[\sqrt{\frac{\mathrm{C}^2}{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^2\mathrm{V}}{\mathrm{As} \cdot \mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

2.3 Bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_n $\left(r_n = r_1 \cdot n^2\right)$, so besitzt es die kinetische Energie $E_{kin,n}$.
Zeigen Sie, dass gilt: $E_{kin,n} = 2{,}2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} \cdot \frac{1}{n^2}$

$$F_{Z_n} = F_{el_n}$$

$$m_e \cdot \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n^2}$$

$$v_n = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot r_n}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot r_1 \cdot n^2}} = \underbrace{\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot r_1}}}_{=v_1} \cdot \frac{1}{n} = v_1 \cdot \frac{1}{n}$$

$$E_{kin_n} = \tfrac{1}{2} m_e v_n^2 = \tfrac{1}{2} m_e v_1^2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$E_{kin_n} = \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(2{,}2 \cdot 10^6\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 2{,}204... \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} \cdot \frac{1}{n^2} \approx \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} \cdot \frac{1}{n^2}}}$$

ODER:

$$F_{Z_n} = F_{el_n}$$

$$m_e \cdot \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_n^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_1} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$E_{kin_n} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_1} \cdot \frac{1}{n^2} = \ldots \approx 2{,}2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} \cdot \frac{1}{n^2}$$

2.4.0 $\varphi(r)$ sei das elektrische Potenzial, das der Atomkern des Wasserstoffatoms in der Entfernung r vom Atomkern erzeugt. Das elektrische Potenzial in unendlich großer Entfernung vom Atomkern sei gleich null.

2.4.1 Erläutern Sie, was man unter einer Äquipotenzialfläche versteht.

Eine Äquipotentialfläche ist eine Fläche gleichen Potentials.

2.4.2 Zeigen Sie, dass für das elektrische Potenzial φ_n, das der Atomkern auf der Kreisbahn mit dem Radius r_n erzeugt, gilt: $\varphi_n = 27\,\mathrm{V} \cdot \frac{1}{n^2}$

$$\rho_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{r_1} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \text{mit } r_n = r_1 \cdot n^2$$

$$\rho_n = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}} \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{5{,}3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{n^2} = 27{,}1667\ldots\mathrm{V} \cdot \frac{1}{n^2} \approx \underline{\underline{27\,\mathrm{V} \cdot \frac{1}{n^2}}}$$

2.5.0 Die potenzielle Energie des Elektrons im elektrischen Feld des Atomkerns sei in unendlich großer Entfernung vom Atomkern gleich null.

2.5.1 Berechnen Sie die Gesamtenergie $E_{Ges,1}$ eines Elektrons, das sich auf der Kreisbahn mit dem Radius r_1 befindet.

Für die Gesamtenergie auf der ersten Kreisbahn gilt:

$$E_{Ges_1} = E_{kin_1} + E_{pot_1} = E_{kin_1} - e \cdot \rho_1$$

$$E_{Ges_1} = 2{,}2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} - 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 27\,\mathrm{V} = -2{,}1254 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} \approx \underline{\underline{-2{,}1 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}}} \quad (-13{,}3\,\mathrm{eV})$$

2.5.2 Dem Elektron auf der Kreisbahn mit dem kleinsten Radius r_1 muss eine Mindestenergie zugeführt werden, damit es den Anziehungsbereich des Atomkerns verlassen kann. Man bezeichnet diese Mindestenergie als Ionisierungsenergie.
Bestimmen Sie mit Hilfe eines Energieansatzes die Ionisierungsenergie E_{ion} für das Wasserstoffatom.

Für die Ionisierungsenergie E_{ion} für ein Wasserstoffatom gilt:

$$E_{ion} = E_{Ges_\infty} - E_{Ges_1} = \underbrace{E_{kin_\infty}}_{0} + \underbrace{E_{pot_\infty}}_{0} - E_{Ges_1} = -E_{Ges_1} = \underline{\underline{2{,}1 \cdot 10^{-18}\,\text{J}}} \qquad (13{,}3\,\text{eV})$$